Ústav aplikovanej mechaniky a mechatroniky, SjF STU Bratislava; www.sjf.stuba.sk

2-5596 Mechanika viazaných mechanických systémov
pre špecializáciu Aplikovaná mechanika, 4.roč. zimný sem.
Garant: doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

7. Maticové metódy dynamickej analýzy VMS. 2.časť

Aké sú teoretické východiská pre riadenie algoritmov riešiča MSC.ADAMS/Solver

2.časť

Obsah

1časť
1 Poslanie technológie virtuálnych prototypov
2 Výber vhodného matematického formalizmu pre algoritmy riešiča
 2.1 Hamiltonov variačný princíp
3 Stavové rovnice a stavové premenné
 3.1 Stavové rovnice pre teleso
 3.2 Stavové premenné pre teleso
 3.3 Stavové rovnice mechatronickej sústavy
4. Stratégia dosiahnutia výpočtovej efektívnosti algoritmov riešiča GSTIFF
 4.1. Prvý krok stratégie - dosiahnutie riedkosti Jakobiánu
 4.2. Druhý krok stratégie - konvertovanie DAE na ODE
 4.3. Tretí krok stratégie - konvertovanie ODE na NAE
5. Práca prediktora a korektora pri dynamickej analýze
 5.1. Práca prediktora
 5.2. Práca korektora
 5.3. Stabilita procesu integrácie

2. časť
6. Integrátor ABAM
7. Integrátor RKF
8. Dynamická analýza s integrátormi Newmark a HHT
9. Typy analýz virtuálneho prototypu
 9.1.1 Analýza východiskovej polohy členov (Assembly)
 9.1.2 Analýza východiskových rýchlostí členov
 9.2. Kinematická analýza zrýchlení členov
 9.3 Inverzná dynamická analýza
 9.4 Statická analýza
 9.5 Kvázistatická analýza
 9.6 Dynamická analýza
 9.7 Lineárna modálna analýza vlastných tvarov a vlastných frekvencií
 9.8 Frekvenčná analýza vynúteného kmitania
10. Integrátory a ich vlastnosti v prostredí programu MSC.ADAMS
 10.1 Štandardné nastavenia parametrov v module MSC.ADAMS/Solver
 10.2 Riadenie práce riešiča
 10.3 Kroky priebehu riešenia systému DAE rovníc
 10.4 Riešenie systému DAE vo východiskovom stave modelu

10.5 Predikcia riešenia pre nasledovný krok
10.6 Iteratívna korekcia
10.7 Odchýlky pri numerickom riešení
10.8 Hodnotenie kvality riešenia
11. Záver
12. Literatúra

6. Integrátor ABAM

Na dynamickú analýzu nestabilnej mechanickej sústavy s pomerom SR (stiffness ratio) $\mathrm{SR} \approx \omega_\mathrm{D} / \omega_\mathrm{A} \leq 20$, kde ω_D je najvyššia neaktívna (utlmená) vlastná frekvencia a ω_A je najvyššia aktívna vlastná frekvencia, v ktorej dominuje veľký počet kontaktných väzobných podmienok a pôsobia malé, plynule sa meniace sa sily, je vhodný viackrokový integrátor ABAM s predikciou podľa metódy Adams-Bashford a korekciou podľa metódy Adams-Moulton. PECE integrátory (ABAM) neiterujú, sú presné, počítajú len s aktuálnymi hodnotami, majú nízku stabilitu, kombinujú použitie explicitných a implicitných integrátorov.

7. Integrátor RKF

Jednokrokový integrátor RKF (Runge-Kutta-Fehlberg45) používa rozvoj do Taylorovho radu, nezávisí na histórii a dobre sleduje odchýlky integrácie.

8. Dynamická analýza s integrátormi Newmark a HHT

Výhodou priamej integrácie DAE s pohybovými rovnicami druhého rádu algoritmom riešiča podľa metódy ktorú navrhol Newmark (1957) vo forme diskretizácie pohybových rovníc s numerickou aproximáciou zrýchlení, rýchlostí a premiestnení, je stabilita riešenia aj pre malé hodnoty integračného kroku h v celej zápornej časti komplexnej roviny pri dodržaní vhodnej proporcionality súčiniteľov $\gamma > 0.5$ a $\beta > 0.25(\gamma + 0.5)^2$ v aproximačných vzťahoch

$$\bar{y}_{\mathrm{n+1}} = \bar{y}_\mathrm{n} + \mathrm{h}\dot{\bar{y}}_\mathrm{n} + 0.5\mathrm{h}^2 \left[(1-2\beta)\ddot{\bar{y}}_\mathrm{n} + 2\beta\ddot{\bar{y}}_{\mathrm{n+1}} \right]$$

$$\dot{\bar{y}}_{\mathrm{n+1}} = \dot{\bar{y}}_\mathrm{n} + \mathrm{h} \left[(1-\gamma)\ddot{\bar{y}}_\mathrm{n} + \gamma\ddot{\bar{y}}_{\mathrm{n+1}} \right]$$

Integrátor NEWMARK je jednokrokový, implicitný, prvého rádu, proporcionálny k veľkosti hodnoty h integračného kroku a používateľ zadáva hodnoty súčiniteľov γ (GAMMA), β (BETA), ktoré majú štandardné hodnoty β = 0.36, γ = 0.7.
Nevýhodou jednokrokovej Newmarkovej metódy je, že má nedostatočné tlmenie vyšších frekvencií, lebo súčiniteľ α numerického tlmenia je v tomto prípade α = 0, preto Hilber, Hughes, Taylor (1977) navrhli α metódu (HHT) diskretizácie, pri ktorej sa sily z predošlého kroku n násobia súčiniteľom (α/1+α) a v aktuálnom kroku $\mathrm{n}+1$ súčiniteľom (1+α), pričom používa rovnaké aproximačné vzťahy ako Newmarkova metóda, zachováva stabilitu riešenia a tlmenie aktívne riadi parametrom α

$\alpha \in [-0.33, 0]$, $\gamma = 0.5(1-2\alpha)$, $\beta = 0.25(1-\alpha)^2$

Hlavnou stratégiou HHT integrátora je čo najviac zmenšiť počet obnovovaní Jakobiánu. Na rozdiel od BDF integrátorov, ktoré disproporcionálne zväčšujú prvky Jakobiánu ich násobením prevrátenou hodnotou 1/h integračného kroku, HHT integrátor násobí prvky Jakobiánu integračným krokom h. Pri modeloch s veľkým počtom kontaktov sa to prejaví numericky stabilnejším Jakobiánom a v spoľahlivejších korekciách modifikovanej NR metódy. Algoritmy Newmark a HHT linearizujú systém nelineárnych algebrických rovníc aproximáciou Taylorovým radom, pričom na rozdiel od algoritmov riešiča GSTIFF a riešiča WSTIFF niektoré výrazy v matici Jakobiánu časovým krokom h nedelia, ale násobia.

Integrátor HHT je vylepšením integrátora NEWMARK. HHT je jednokrokový, implicitný integrátor druhého rádu, proporcionálny k druhej mocnine h^2 hodnoty integračného kroku. Integrátor HHT je vhodný na integráciu pohybových rovníc druhého rádu, ktoré netreba transformovať do ekvivalentných (ODE) rovníc prvého rádu, čím sa zmenší veľkosť Jakobiánu a zlepší jeho numerická stabilita.
Integrátory HHT a NEWMARK v riešiči A/Solver (C++) sú oveľa rýchlejšie ako GSTIFF, lebo minimalizujú počet obnovovaní Jakobiánu, ale integrátor GSTIFF je presnejší.

Na realizáciu dynamickej analýzy modelu s veľkým počtom kontaktov používame riešič Newmark, ktorý diskretizuje zmiešanú sústavu DAE na systém nelineárnych algebrických rovníc pomocou parametrov β, γ, alebo riešič HHT využívajúci α metódu.

9. Typy analýz virtuálneho prototypu

Technológia (MSS) simulácií virtuálnych prototypov poskytuje rozmanité typy analýz potrebných pri návrhu koncepcie, pri overovaní prevádzkových parametrov a obmedzení, pri odhalení slabých miest a rezerv, pri rekonštrukcii príčin porúch aj pri hľadaní kompromisov ako zosúladiť multidisciplinárne mechanické, elektronické a hydraulické systémy na dosiahnutie vyžadovaných vlastností. Pri požiadavke na ktorýkoľvek typ analýzy algoritmy riešiča posudzujú virtuálne prototypy z dynamického hľadiska.

9.1 Analýza začiatočných podmienok

Pred integráciou pohybových rovníc najprv prebehne výpočet stavových veličín $\overline{y}_0$ v čase t_0 pri procese poskladania sústavy (Assembly) do východiskovej konfigurácie tak, aby polohy a rýchlosti členov spĺňali väzobné podmienky a aby zrýchlenia a sily spĺňali začiatočné podmienky (Initial Condition Analysis). Potom algoritmy určia zrýchlenia a sily, ktoré odpovedajú konzistentnej sústave začiatočných podmienok.

9.1.1 Analýza východiskovej polohy členov (Assembly)

Algoritmus analýzy začiatočných podmienok sa snaží malými premiestneniami zosúladiť väzobné rovnice pre nekonzistentne zadané geometrické väzby (joints). Používateľ môže vyžadovať, aby algoritmus analýzy začiatočných podmienok nemenil počet špecifikovaných súradníc polohy rovný pohyblivosti.

9.1.2 Analýza východiskových rýchlostí členov

Presnosť výsledkov numerickej dynamickej analýzy sa dá zvýšiť ak budú algoritmy sledovať popri polohe aj rýchlosti členov.

9.1.3 Analýza východiskových zrýchlení členov a východiskových reakčných síl

Presnosť výsledkov numerickej dynamickej analýzy bude najvyššia ak budú algoritmy sledovať popri polohe a rýchlosti členov aj zrýchlenia a sily vo väzbách.

9.2 Kinematická analýza

Sústava viazaných nehmotných členov, prípadne sústava viazaných telies so zotrvačnými vlastnosťami je vhodná na kinematickú analýzu, prípadne na inverznú dynamickú analýzu, ak má zadefinované geometrické väzby aj kinematické väzby, teda má predpísaný časový priebeh pre všetky nezávislé súradnice polohy vstupných hnacích členov, ktorých počet je rovný kinematickej pohyblivosti $\mathrm{n_K}$ sústavy. Potom má sústava nulovú dynamickú pohyblivosť, teda má $\mathrm{n_D} = 0$ dynamických stupňov voľnosti pohybu a vonkajšie sily nevplývajú na zmenu jej konfigurácie.

9.2.1 Kinematická analýza polohy členov

Pri kinematickej analýze podľa predpísaných pohybov pre hnacie členy algoritmy určujú závislé súradnice polohy, rýchlosti a zrýchlenia z väzobných nelineárnych algebrických rovníc, ktoré reprezentujú sústavu viazaných telies virtuálneho prototypu pomocou numerickej iteračnej Newton-Raphsonovej (NR) metódy, alebo úspornejšiej modifikovanej Newton-Raphsonovej (MNR) metódy. Najprv prebehne linearizácia nelineárnych algebrických rovníc aproximáciou lineárnymi členmi Taylorovho radu. Po dosadení začiatočných odhadov $\overline{q}_z(\mathrm{t}_1)$ závislých lokálnych súradníc získaných pri skladaní (assembly) sústavy viazaných telies v čase $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1$ algoritmy minimalizujú reziduá pomocou korekcií vypočítaných zo sústavy lineárnych algebrických rovníc pomocou riešičov:

- HARWELL Solver, ktorý dokáže pracovať aj s nadbytočnými väzobnými podmienkami, alebo
- CALAHAN Solver, ktorý je rýchlejší než HARWELL Solver, ale nepracuje s nadbytočnými väzobnými podmienkami. Štandardne je nastavený integrátor CALAHAN Solver.

Na výpočet odhadu $\overline{q}_z(\mathrm{t}_{\mathrm{n}+1})$ pre nasledovný krok v čase $\mathrm{t} = \mathrm{t}_{\mathrm{n}+1}$ algoritmy využívajú rýchlosť a zrýchlenie z predošlého kroku v čase $\mathrm{t} = \mathrm{t}_{\mathrm{n}}$

$$\overline{q}_z(\mathrm{t}_{n+1}) = \overline{q}_z(\mathrm{t}_n) + (\mathrm{t}_{n+1} - \mathrm{t}_n)\dot{\overline{q}}_z(\mathrm{t}_n) + 0.5(\mathrm{t}_{n+1} - \mathrm{t}_n)^2\ddot{\overline{q}}_z(\mathrm{t}_n) .$$

9.2.2 Kinematická analýza rýchlostí členov

Každú transformačnú maticu vzájomnej polohy telesa b voči a môžeme vyjadriť súčinom transformačných matíc základných pohybov

$$T_{ab} = \prod_{i=1}^{m_{ab}} T_Z^i(p_{iab})$$

pre OM je rovnica polohy bodu L

$$r_{1L} = \prod_{i=1}^{m_p} T_Z^i(p_i) r_{uL}$$

rýchlosť bodu L z telesa u OM

$$v_{1L} = (\sum_{i=1}^{m_p} U_i \dot{p}_i) r_{uL}$$

kde $U_i = T_Z^1 T_Z^2 ... T_Z^i D_Z^i T_Z^{i+1} ... T_Z^{m_p}$

Rovnica polohy členov JM

$$\prod_{i=1}^{m_p^1} T_Z^i(p_i) = \prod_{i=1}^{m_p} T_Z^i(p_i)$$

Rovnica rýchlostí členov JM

$$\sum_{i=1}^{m_p^1} U_i \dot{p}_i = \sum_{i=m_p^1+1}^{m_p} U_i \dot{p}_i$$

9.2.3 Kinematická analýza zrýchlení členov

Zrýchlenie bodu L z telesa u OM

$$a_{1L} = [(\sum_{i=1}^{m_p} U_i \ddot{p}_i + \sum_{k=1}^{m_p} U_{ik} \dot{p}_i \dot{p}_k)] r_{uL}$$

kde

$$U_{ik} = T_Z^1 T_Z^2 ... T_Z^i D_Z^i T_Z^{i+1} ... T_Z^k D_Z^k T_Z^{k+1} ... T_Z^{m_p}$$

$$U_{ii} = T_Z^1 T_Z^2 ... T_Z^i (D_Z^i)^2 T_Z^{i+1} ... T_Z^{m_p}$$

Rovnica zrýchlení členov JM

$$\sum_{i=1}^{m_p^1} (U_i \ddot{p}_i + \sum_{k=1}^{m_p^1} U_{ik} \dot{p}_i \dot{p}_k) = \sum_{i=1}^{m_p} (U_i \ddot{p}_i + \sum_{i=m_p^1+1}^{m_p} U_{ik} \dot{p}_i \dot{p}_k)$$

9.3 Inverzná dynamická analýza

Pri inverznej dynamickej analýze VMS predpíšeme vyžadovaný priebeh pohybu pracovných členov a určíme potrebný priebeh hnacích dynamických účinkov (sily, alebo momenty), ktoré zabezpečia, aby vyžadovaný priebeh pohybu pracovných členov nastal. Zároveň určíme dynamické reakcie v geometrických väzbách.

9.4 Statická analýza

Podmienkou pre statickú, prípadne kvázistatickú rovnovážnu analýzu (EQUILIBIUM) je aby mala sústava viazaných telies nenulovú dynamickú pohyblivosť, teda $n_D \geq 1$ dynamických stupňov voľnosti pohybu (DOF). Algoritmus určí rovnovážny stav sústavy, v ktorom sú všetky sily v rovnováhe. Neberie do úvahy zotrvačnosť telies a zrýchlenia aj rýchlosti telies položí rovné nule. Pracuje s ľavou stranou rovnice $\overline{F} = m\dot{\overline{v}}, \dot{\overline{v}} = \overline{0}$ a nelineárne algebrické rovnice rieši Newton Raphsonovou metódou.

Pri statickej analýze algoritmy riešiča nájdu rovnovážne veličiny pre pre premiestnenia a silové premenné ako aj pre diferenciálne premenné, ktoré používateľ zadefinoval pri utvorení diferenciálnych rovníc (DIFF), zovšeobecnených stavových rovníc (GSE), lineárnych stavových rovníc (LSE) a prenosových funkcií s jedným vstupom a jeným výstupom (TFSISO). Tieto rovnovážne veličiny budú začiatočnými podmienkami pre všetky následné analýzy a algoritmy riešiča položia ich časové derivácie rovné nule, ak používateľ nebude príkazom STATIC_HOLD vyžadovať, aby sa počas analýz nemenili.

9.5 Kvázistatická analýza

Pri kvázistatickej analýze algoritmy riešiča nájdu rovnovážne silové veličiny pre predpísané konfigurácie členov sústavy, pričom sily nevyvolávajú pohyb.

9.6 Dynamická analýza

Sústava viazaných telies virtuálneho prototypu musí mať nenulovú dynamickú pohyblivosť, teda má $n_D \geq 1$ dynamických stupňov voľnosti pohybu (DOF). Pohyb viazaného systému telies so zotrvačnými vlastnosťami nastáva dôsledkom pôsobenia akčných síl a reakcií v geometrických väzbách. Algoritmus pracuje s obidvoma stranami rovnice $\overline{F} = m\dot{\overline{v}}$, lebo sily súvisia so zrýchleniami. Rýchlosti získa integráciou zrýchlení a premiestnenia získa integráciou rýchlostí. Pri dynamickej analýze ide o riešenie zmiešanej sústavy (DAE) nelineárnych diferenciálnych a algebrických rovníc.

9.7 Lineárna modálna analýza vlastných tvarov a vlastných frekvencií

Predpokladom pre lineárnu modálnu analýzu aj pre frekvenčnú analýzu vynúteného kmitania sústavy viazaných telies je, že má nenulovú dynamickú pohyblivosť, teda má $n_D \geq 1$ dynamických stupňov voľnosti pohybu (DOF) a časovo nezávislý Jakobián väzobných rovníc. Algoritmy modulu A/Linear využívajú algoritmy riešiča A/Solver, ktorý pracuje s obidvomi stranami rovnice $\overline{F} = m\dot{\overline{v}}$ a vypočíta stavové matice (STATEMAT, alebo MKB) ako aj vlastné tvary a vlastné frekvencie (EIGENSOL) vo vyžadovanom operačnom stave linearizovanej sústavy stavových rovníc.

$$M\dot{\overline{u}} + C\overline{u} + K\overline{q} = \overline{0}$$
$$\overline{u} - \dot{\overline{q}} = \overline{0}$$

9.8 Frekvenčná analýza vynúteného kmitania

Algoritmy modulu A/Vibration využívajú algoritmy riešiča A/Solver na určenie frekvenčnej odozvy, modálnych súradníc, spektrálnej výkonovej hustoty a prenosových funkcií vo vyžadovanom operačnom stave linearizovanej sústavy virtuálnych prototypov importovaných z ostatných modulov programu MSC.ADAMS.

10. Integrátory a ich vlastnosti v prostredí programu MSC.ADAMS

V programe MSC.ADAMS sú modelovacím príkazom INTEGRATOR (Statement INTEGRATOR) k dispozícii nasledovné typy integrátorov:

ADAMS/Solver (Fortran):

- GSTIFF, WSTIFF, stiffly stable (SR > 200), multi-step, variable order, variable step
- Constant BDF, stiffly stable (SR > 200), variable order, fixed step
- ABAM, nonstiff (SR < 20), multi-step, variable order, variable step
- Runge-Kutta-Fehlberg 45, nonstiff (SR < 20), single-step

ADAMS/Solver (C++):

- GSTIFF, WSTIFF , stiffly stable, multi-step, variable order, variable step
- HHT (Hilber-Hughes-Taylor), stiffly stable, one step, second order integrator
- NEWMARK, stiffly stable, one step, first order integrator

10.1 Štandardné nastavenia parametrov v module MSC.ADAMS/Solver

Z lišty Menu Bar (MB) kliknutím na Setting a Solver môžeme zadať typ analýzy (Kinematics, Dynamics, Equilibrium, Initial Condition), typ riešiča (Solver Executable,), zobrazovanie priebehu analýzy (Display), nastaviť spôsob výstupu (Output), predpísať spôsob obnovovania Jakobiánu (Pattern), vyžiadať si správy o priebehu procesu riešenia (Debugging) a vybrať druh oprimalizačného algoritmu (Optimizer).

V oboch typoch riešičov A/Solver (Fortran) aj A/Solver (C++) je štandardne nastavený integrátor typu GSTIFF. V základnom paneli pre integrátor GSTIFF máme možnosť voľby metódy substitúcie. Pre nastavenie parametrov integrátora GSTIFF je k dispozícii aj rozšírený panel.

ADAPTIVITY $\geq$ 0, (0.1 - 0.001)
ALPHA = -0.3 pre HHT a NEWMARK
BETA = 0.36 pre HHT a NEWMARK
GSTIFF, I3
CORRECTOR = original
ERROR = 1.0E-3, pre HHT a NEWMARK 1.0E-5
GAMMA = 0.7 pre HHT a NEWMARK
HINIT = 1/20 zo začiatočnej veľkosti integračného kroku (of the output step)

HMAX = veľkosť integračného kroku (the output step)
HMIN = 1.0E-6*HMAX
INTERPOLATE = OFF pre GSTIFF, WSTIFF, ON pre ABAM, RKF_45
MAXIT = 10
KMAX = 6 pre GSTIFF, WSTIFF
KMAX = 12 pre ABAM
PATTERN = T:F:F:F:T:F:F:F:T:F (T-true, obnovovať Jakobián, F-false, neobnovovať)

10.2 Riadenie práce riešiča

Príkaz INTEGRATOR nám umožňuje riadiť prácu numerickej integrácie zmiešanej sústavy DAE pri dynamickej analýze v prípadoch, keď štandardné nastavenie hodnôt parametrov riešiča nie je optimálne z hľadiska:

- vyžadovanej presnosti
- rýchlosti riešenia
- konvergencie riešenia

Na riadenie práce algoritmov integrátora máme k dispozícii príkazy

- pre voľbu typu integrátora: GSTIFF, WSTIFF, ABAM, CONSTANT_BDF, BE (Backward Euler), RKF (Runge-Kutta-Fehlberg45), NEWMARK, HHT (Hilber-Hughes-Taylor),
- pre voľbu typu korektora: CORRECTOR original, alebo modified,
- pre voľbu typu metódy substitúcie: SI2, SI1,
- ADAPTIVITY A na zväčšenie tolerancie pre korektor o člen A/h.
- ERROR na predpísanie relatívnej a celkovej lokálnej dovolenej integračnej odchýlky v hodnotách premiestnení a rýchlostí ako aj u ostatných stavových premenných z diferenciálnych rovníc (DIFF, LSE, GSE, and TFSISO),
- HINIT, HMAX, HMIN na definovanie časového kroku integrácie,
- INTERPOLATE (ON, alebo OFF), ktorým určíme, či integrátor má, alebo nemá dosiahnuť výstupný bod,
- MAXIT na predpísanie maximálneho počtu iterácií pre Newton–Raphsonovu iteračnú metódu,
- KMAX na predpísanie maximálneho stupňa polynómu, ktorý môže integrátor použiť,
- PATTERN na voľbu T (true) či sa má, alebo F (false) či sa nemá obnovovať Jakobián,
- SCALE na násobenie hodnoty T, čo je súčet relatívnej a celkovej tolerancie pre stavový vektor. Z toho vyplývajú tolerancie ako násobky r1*T pre translačné premiestnenia, r2*T pre uhlové premiestnenia a r3*T pre modálne súradnice,
- ALPHA α je súčiniteľ selektívneho numerického tlmenia dôsledkov náhlych zmien veličín pri práci integrátora HHT. Pôsobí ako nízkopásmový filter, teda vysoké frekvencie tlmí, ale nízke nie. Pri hodnote $\alpha = 0$ pracuje bez tlmenia, maximálne tlmenie je pre hodnotu $\alpha = -0.3$,

- BETA β, GAMMA γ v integrátore NEWMARK súvisia so súčiniteľom α, vystupujú vo vzťahu na diskretizáciu pohybových rovníc s numerickou aproximáciou zrýchlení, rýchlostí a premiestnení aj vo vzťahoch na ich integráciu podľa Newmarkovej metódy,
- DEFAULT vráti nové nastavenia na pôvodné,
- LIST slúži na výpis práve použitých nastavení.

10.3 Kroky priebehu riešenia systému DAE rovníc

- Kontrola syntaxe príkazov pri utváraní modelu,
- zostavenie pohybových rovníc podľa modelu,
- identifikácia nadbytočných okrajových podmienok a ich odstránenie,
- DOF = 0 kinematická úloha,
- DOF > 0 statická, alebo dynamická úloha,
- voľba implicitnej nebo explicitnej metódy (podľa typu integrátora),
- dekompozícia, symbolická faktorizácia,
- výpočet pre daný časový krok,
- predikcia, korekcia, príprava dát pre ďalší časový krok,
- kontrola numerickej singularity matíc, či existuje jednoznačné riešenie, alebo riešenie nekonverguje,
- pokračovanie s ďalším časovým krokom, alebo ukončenie.

10.4 Riešenie systému DAE vo východiskovom stave modelu

Najprv prebehne riešenie zmiešanej sústavy diferenciálnych a algebrických rovníc (DAE) vo východiskovom stave modelu podľa jednokrokovej implicitnej metódy BE (Backward Euler) prvého rádu. Aproximačný algoritmus BE pretransformuje systém DAE diferenciálnych a algebrických rovníc na nelineárne algebrické diferenčné rovnice, ktoré sú riešiteľné Newton-Raphsonovou iteračnou metódou. Dáva do súvisu hodnoty stavových veličín a ich derivácie v tom istom časovom okamžiku.

10.5 Predikcia riešenia pre nasledovný krok

Pri predikcii riešenia pre nasledovný krok algoritmus BDF preloží polynóm cez získane predošlé hodnoty riešenia vo východiskovom stave modelu. Riešič A/Solver používa pre kinematické analýzy prediktor prvého rádu s aproximáciou krivky priamkou, prediktor druhého rádu (Second order predictor) využíva na aproximáciu parabolu. Pre dynamické analýzy pracuje prediktor podľa metódy Backward Difference Formulae (BDF) a GSTIFF, WSTIFF majú prediktor do šiesteho rádu. Integrátor ABAM pre úlohy s vysokými aktívnymi budiacimi frekvenciami môže mať prediktor až do rádu 12.

10.6 Iteratívna korekcia

Riešič A/Solver pri práci algoritmu korektora porovnáva predikované hodnoty s hodnotami, ktoré získal modifikovanou Newton-Raphsonovou metódou (MNR) s predikovanými hodnotami ako odhadom, pričom GSTIFF využíva Taylorov rad a WSTIFF pracuje metódou

Newton Divided Difference. Rozdiel hodnôt z korektora a prediktora algoritmy korektora porovnajú s predpísanou hodnotou dovolenej odchýlky (ERROR) a podľa potreby upravia integračný krok h a rád k aproximačného polynómu prediktora, aby boli čo najvyššie.

10.7 Odchýlky pri numerickom riešení

Odchýlky pri numerickom riešení vznikajú zaokrúhľovaním (round-off) presných hodnôt výsledkov. Pri narastajúcom počte iterácií a časových krokov odchýlka rastie. Pri odchýlke integráce orezávaním (truncation) veľkosť odchýlky závisí od použitých jednotiek. Prepočet matice Jakobiánu zrýchli konvergenciu. Vyšší rád k integrátora zmenšuje odchýlku integrácie. Príliš malá hodnota h integračného kroku môže znamenať, že prebiehajú zbytočné výpočty, ktoré môžu spôsobiť zaokrúhľovanie výsledkov. Naopak príliš veľká hodnota h integračného kroku znamená, že pravdepodobne nie sú splnené požiadavky na presnosť.

10.8 Hodnotenie kvality riešenia

Ak získané hodnoty stavových veličín nespĺňajú vyžadované podmienky, algoritmus riešenie opakuje pre menší časový krok h, prípadne mení stupeň k polynómu. Po splnení vyžadovaných podmienok prebehne určenie časového kroku h a stupňa k polynómu pre ďalší integračný krok.

11. Záver

Zvyšovanie nárokov na kvalitu, životnosť a ekologickosť výrobkov si vyžaduje získať schopnosť uplatniť najnovšie poznatky z mnohých oblastí, kde zjednocujúcim faktorom je práve matematická reprezentácia budúceho výrobku vo virtuálnej počítačovej forme.

Na zvládnutie procesu riadenia práce algoritmov riešeča pre analýzu, syntézu, optimalizáciu a riadenie sústav viazaných telies pomocou technológie virtuálnych prototypov je potrebné sa oboznámiť s teoretickými východiskami práce integračných algoritmov.

Ukázalo sa, že pre spoľahlivú, rýchlu a presnú prácu iteračných algoritmov je potrebné využiť techniku riedkych matíc na utvorenie Jakobiánu, vhodného pre faktorizáciu, teda súčin trojuholníkových matíc, metódy modálnej optimalizácie a metódy stabilnej (stiff) integrácie. Algoritmy najprv substitúciami znížia rád pohybových diferenciálnych rovníc opisujúcich časovú odozvu systému a pretransformujú zmiešaný systém DAE diferenciálnych a algebraických rovníc druhého rádu na obyčajné diferenciálne rovnice ODE prvého rádu. Aby sa dali využiť metódy rýchleho riešenia systému lineárnych rovníc algoritmy potom pretransformujú ODE na systém nelineárnych algebraických rovníc NAE, ktoré linearizujú Newton-Raphsonovou numerickou metódou s kvadratickou konvergenciou.

Proces integrácie sa dá interaktívne riadiť zadávaním vhodných hodnôt konvergenčnej odchýlky ERROR, začiatočnej veľkosti integračných krokov HINIT, podmieňovaním triangulizácie stavovej matice príkazom PATTERN, nastavením krokovacej frekvencie HMIN, ktorú je potrebné vhodne zvoliť na základe modálnej analýzy a ďalšími uvedenými prostriedkami. Správnosť a presnosť výsledkov zo simulácie treba vždy overiť buď porovnaním s výsledkami z riešenia systému rovníc v uzatvorenom tvare (ak sa dajú získať), alebo sledovaním celkovej energie, ďalej technikami sledovania vplyvu zmien parametrov riešiča a pri zložitých výrobkoch v záverečnej vývojovej fáze aj experimentálne v reálnych prevádzkových podmienkach. Z uvedeného je zrejmé, že integrácia systému DAE je proces, ktorý sa nezaobíde bez aktívnej účasti používateľa.

Ak pripravené algoritmy nebudú pre nás čiernou skrinkou, potom ich cieľavedomým využívaním nadobudneme hlbší pohľad na vlastnosti virtuálneho prototypu, čo nám umožní získať spoľahlivé časové histórie dynamických zaťažení, potrebné pre konečnoprvkové napäťové analýzy a predikciu životnosti ako aj dosiahnuť vyžadované vlastnosti ako kompromis medzi prísnou optimalizáciu a štatisticky overenou odolnosťou (robustnosťou) budúceho výrobku voči náhodným zmenám vonkajších pracovných podmienok a jeho vnútorných vlastností.

12. Literatúra

[1] Newmark, N.M. (1959). A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, pages 6794.

[2] Gear, W.C. (1971). Simultaneous Numerical solution of Differential-algebraic Equations. IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, No. 1, pp. 89-95. New York. Institute of Electrical and Electronics Engineers.

[4] Brayton, R. K., F. G. Gustavson, and G. D. Hatchel. (1972). A New Efficient Algorithm for Solving Differential-Algebraic Systems using Implicit Backward Differentiation Formulas. Proceedings of the IEEE, Vol. 60, No. 1, pp. 98-108. New York. Institute of Electrical and Electronics Engineers.

[5] Shampine, L.F., Gordon, M.K. (1974). *Computer Solutions of Ordinary Differential Equations*. W. H. Freeman and Co.

[6] Van Bokhoven, W.M.G. (1975). *Linear Implicit Differentiation Formulas of Variable Step and Order.* IEEE Transactions on Circuits and Systems, 22 (2).

[7] Orlandea, N., Chace, M.A., Calahan, D.A. (1977). A Sparsity Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems. Part I. and II. Journal of Engineering for Industry, Vol. 99. pp. 773-784.

[8] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, 5:283292.

[9] Wehage, R.A. and Haug, E.J. (1982). *Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems*. Journal of Mechanical Design, Vol. 104. No. 1,247 - 255.

[10] Gear, C.W., Leimkuhler, B., Gupta, G.K. (1985). *Automatic Integration of Euler-Lagrange Equations with Constaints*. Journal of Computation and Applied Mathematics, 12 & 13, pp. 79-90, North-Holland.

[11] Wielenga, T.J. (1986). The Effect of Numerical Stiffness on Mechanism Simulation. Proceedings from the 1986 International Computers in Engineering Conference, Vol. 1, pp. 369-378. New York. American Society of Mechanical Engineers.

[12] Wielenga, T.J. (1987). Analysis Methods and Model Representation in ADAMS, Mechanical Dynamic Inc. (MDI).

[13] Brenan, K.E., Campbell, S.I., and Petzold, L.R. (1996). Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations, Classics in Applied Mathematics, 14. Society for Industrial & Applied Mathematics; ISBN: 0-89871-353-6.
[14] Asher, U.M.- Petzold, L.R. (1997): Computer Methods for ODE and DAE. Siam. Philadelphia. ISBN 0-89871-412-5.
[15] J.B. McConville, J.F. McGrath. (1998). Introduction to ADAMS Theory, Mechanical Dynamic Inc. (MDI).
[16] Orlandea, N.V. (1999). A study of the effects of the lower index methods on ADAMS sparse tableau formulation for the computational dynamics of multi-body mechanical systems, IMechE Proc Instn Mech Engrs V01 213 Part K.
[17] Negrut, D., Harris, B. (2001). ADAMS Theory in a Nutshell, Mechanical Dynamic Inc. Ann Arbor.
[18] Negrut, D., Dyer, A.(2004). ADAMS/Solver Primer, MSC.Software, Ann Arbor.