

2-5596 Mechanika viazaných mechanických systémov
pre špecializáciu Aplikovaná mechanika, 4.roč. zimný sem.
Garant: doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

Aké sú teoretické východiská pre analýzu kmitania VMS pomocou modulu MD.ADAMS/Vibration

- Potreba poznatkov o kmitaní
- Dynamické charakteristiky VMS
- Laplaceova transformácia časovo závislej funkcie (diferenciálnych pohybových rovníc) na algebraické rovnice prenosových funkcií na sledovanie vŕahu vstup-výstup
- Fourierova transformácia Laplaceovej transformácie na získanie amplitúdovo-fázového spektra frekvenčných charakteristík v Gaussovej komplexnej rovine.
- Grafické zobrazenie spektra signálu pomocou amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky a fázovo-frekvenčnej charakteristiky.
- Spektrálna a modálna analýza v prostredí MD.ADAMS/Vibration.

Potreba poznatkov o kmitaní pri vývoji výrobkov s počítačovou podporou

Dnešné nízkoohmotné, štruktúrne zložitejšie a kompaktné výrobky sú výsledkom uplatnenia počítačovej podpory vývoja s algoritmicizovanými sofistikovanými metódami analýzy, syntézy a optimalizácie mechanizmov ako aj výsledkom použitia vysokopevných materiálov získaných novými výrobnými technológiami. Zásluhou výkonných pohonov výrobky dosahujú vysoké prevádzkové rýchlosti, kde sa výrazne prejavujú zotrvačné vlastnosti, nerovnomerné rozloženie rotujúcich hmôt, nelinearity prevodov a vplyvy vonkajšieho dynamického budenia na frekvenčné odozvy, lebo z dôvodu nízkeho materiálového tlmenia sú výrobky náchylné nadobudnúť rezonančný stav.

Pri neustále náročnejších požiadavkách na zníženie nákladov a skrátenie času na vývoj sa od výrobkov novej generácie očakáva, že budú znášať dynamické zaťaženia na hranici využitia pružných vlastností materiálov, že budú mať stabilné dynamické vlastnosti odolné voči náhodným zmenám vonkajších vplyvov aj voči postupným zmenám vnútorných vlastností, že budú mať stále vyšší výkon, dlhšiu životnosť, že budú mať účinné autonómne fungujúce riadiace systémy, teda že budú schopné dlhodobo spoľahlivo pracovať v ťažkých podmienkach s minimálnymi požiadavkami na údržbu a že dokonca budú mať nízku cenu. V tých prípadoch, kde je kmitanie nežiadúce by mali byť výrobky čoraz tichšie, dynamicky vyvážené, s minimálnym budiacimi silami v pružno-tlmiacich prvkoch uložení, na druhej strane, ak je kmitanie potrebné, vyžadujeme, aby sa na generovanie kmitania pracovných členov spotrebovalo čo najmenej energie.

Vyššie nároky bude možné splniť len ak uplatníme súčasné poznanie teoretických východísk pri hodnotení dynamických charakteristík kmitania z pohľadu príčin ich vzniku, vplyvu na vlastnosti výrobku a ak využijeme súčasné možnosti počítačovej podpory pri analýze, vyhodnocovaní a riadení kmitania tak, aby neznižovalo prevádzkový výkon výrobku a neprispievalo k zvyšovaniu jeho deformácií, namáhania, únavy a šírenia hluku.

Pri utváraní, budení, analýze, zobrazovaní a vyhodnocovaní výsledkov komplikovaných multidisciplinárnych sústav využívame počítačovú podporu s algoritmicizovanými postupmi,

ale je rozhodujúce mať schopnosti a skúsenosti ako správne interpretovať získané výsledky a potom cieľavedome meniť parametre systému na dosiahnutie vyžadovaných dynamických vlastností mechanických sústav a riadiacich systémov už existujúcich, ale hlavne nových výrobkov.

Hoci explicitné matematické modely dokážeme zostaviť a riešiť v uzatvorenom tvare len pre dynamické sústavy s jedným stupňom voľnosti pohybu, získané poznatky sú kľúčom k pochopeniu zložitejších dynamických vlastností systémov s viacerými stupňami voľnosti pohybu. Výhodou je, že matematické modely dynamických sústav a riadiacich systémov obsahujú tie isté pohybové rovnice, čo umožňuje využiť techniky analýzy a získané výsledky z jednej oblasti efektívne aplikovať aj v druhej. Preto poslaním počítačovej podpory vývoja výrobku prostredníctvom súbežných dynamických simulácií mechanických sústav a riadiacich systémov je:

- poskytnúť primerane zjednodušený a výpočtovo efektívny virtuálny prototyp s vlastnosťami, ktoré prijateľne korelujú s výsledkami z meraní na reálnom prototypu,
- umožniť hlbšie porozumieť súvisu multidisciplinárnych vlastností virtuálneho prototypu so stanovenými požiadavkami a konštrukčnými možnosťami prostredníctvom virtuálnej identifikácie parametrov komponentov aj celého systému,
- predvídať budúce vlastnosti výrobku a vplyv navrhovaných zmien pre rôzne prevádzkové režimy,
- pomôcť vybrať správnu koncepciu už na začiatku vývoja výrobku,
- umožniť identifikáciu parametrov reálneho prototypu výrobku z výsledkov úsporných meraní pomocou vhodných algoritmov,
- umožniť stanoviť spôsob rýchlej a dostatočne presnej multikriteriálnej optimalizácie parametrov pružno-tlmiacich prvkov z pohľadu rozloženia vlastných frekvencií a súvisu modálnych príspevkov s vlastnými tvarmi.

Súbežné dynamické simulácie mechanických sústav a ich riadiacich systémov umožňujú v spresnenom modeli rešpektovať nelinearity prevodu mechanickej sústavy, nelinearity v charakteristikách pružno-tlmiacich prvkov, nelinearity v modeloch trenia ako aj nelinearity materiálových vlastností, ktoré sa prejavujú hysteréziami v priebehoch sledovaných veličín a tak zrealizovať získané výsledky.

Pri využívaní technológie virtuálnych prototypov nemáme ambície zostavovať explicitné rovnice matematických modelov virtuálnych prototypov a aj ich numerické riešenie prenechávame na príslušné algoritmy. Vychádzame z toho, že mechanické, elektrické aj riadiace systémy multidisciplinárnych virtuálnych prototypov majú tú istú matematickú podstatu modálnych a spektrálnych vlastností a našou úlohou je utvoriť výpočtovo efektívny model, zdefinovať vhodné okrajové podmienky, sledovať a podľa potreby riadiť prácu riešiča. Na to, aby sme boli pripravení plnohodnotne využiť algoritmy modulu ADAMS/Vibration sa treba zoznámiť s podstatou metód riešenia sústav lineárnych aj nelineárnych algebrických rovníc ako aj riešenia zmiešaných systémov pohybových diferenciálnych rovníc a väzobných nelineárnych algebrických rovníc a ich linearizácie.

Výrobky treba navrhovať tak, aby mali prijateľné vlastnosti z pohľadu kmitania a hluku. K dispozícii sú dve cesty: analýza nameranej odozvy (signálu) na neznáme budenie a modálna analýza citlivosti dynamickej sústavy ako podielu odozvy k budeniu. Cieľom je predikovať odozvu na očakávané budenie pre lineárne (alebo linearizované) systémy ako súčin určenej

citlivosti a budiacej sily. Modálne parametre sú mierou dynamických charakteristík dynamického systému (jazdný komfort a jazdná bezpečnosť vozidla).

Východiskom pre základnú experimentálnu modálnu analýzu je meranie funkcií frekvenčnej odozvy, FRF (Frequency Response Functions).

Dynamické charakteristiky VMS

Vozidlo ako mechatronická sústava

Virtuálny model vozidla je mechatronická sústava viazaných telies MS (dynamická sústava a regulačný systém) s hlavnými členmi: pohonný reťazec, zavesenia kolies, riadenie a prvky regulácie.

Hodnotenie dynamických vlastností vozidla

Dynamické vlastnosti (konštrukčné a prevádzkové charakteristiky) vplyvajú na subjektívne hodnotenie jazdného pohodlia (komfortu), prevádzkovú spoľahlivosť, dynamické zaťaženie prvkov pohonného reťazca, prvkov zavesenia kolies a prvkov regulácie.

Dynamické charakteristiky sústavy sú:

- časová charakteristika (prechodová odozva na budenie skokom a impulzom) vo forme voľných tlmených kmitov, ktorá obsahuje údaje o rozložení vlastných frekvencií a vplyve tlmenia,
- frekvenčná charakteristika ako odozva na harmonické budenie premenlivou frekvenciou ω . Frekvenčnú charakteristiku znázorňujeme vo forme:
 - 3D zobrazenia komplexnej amplitúdy \tilde{q}_0 odozvy s osami: $\text{Re } \tilde{q}_0$, $\text{Im } \tilde{q}_0$, ω a fázovým uhlom φ oneskorenia pohybu sústavy voči budiacej sile,
 - 2D amplitúdovo – fázovej charakteristiky s osami: $\text{Re } \tilde{q}_0$, $\text{Im } \tilde{q}_0$,
 - amplitúdovej charakteristiky s osami: súčiniteľ naladenia $\eta = \omega/\omega_0$, súčiniteľ dynamického zosilnenia $\beta = q_0/q_{st}$, kde je ω_0 vlastná kruhová frekvencia netlmenej sústavy, q_{st} je statická deformácia
 - fázovej charakteristiky s osami: súčiniteľ naladenia $\eta = \omega/\omega_0$, fázový uhol φ
- statická charakteristika (prenosová funkcia je pre nulovú budiacu frekvenciu rovná poddajnosti sústavy).
- Frekvenčná prenosová charakteristika $H(j \omega) = \tilde{q}_0 / \tilde{Q}_0$

Je rovná podielu komplexnej amplitúdy \tilde{q}_0 odozvy a budiacej sily \tilde{Q}_0 , pričom je to zároveň komplexná dynamická poddajnosť.

- Spektrálne a modálne vlastnosti, teda vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitov, ktoré určujeme pre netlmenú konzervatívnu sústavu s pohybovou rovnicou $m\ddot{q} + kq = 0$, m je hmotnosť, k je tuhosť

Budiace účinky môžu byť silové, alebo kinematické:

- **deterministické:**
 - periodické (harmonické, polyharmonické)
 - všeobecné (skokové, impulzné)

- **náhodné:**

- stacionárne: ergodické (biely šum, všeobecné), neergodické
- nestacionárne (slabo, silno pseudonáhodné)

Amplitúda veličiny

Je rovná polovici rozdielu medzi maximom a minimom periodického priebehu veličiny.

Deterministické budenie

Má periodický priebeh známy v každom okamihu, ako má napríklad funkcia sínus s konštantnou amplitúdou.

Čiarové spektrum amplitúd periodického budenia

Tvoria ho koeficienty počtu R harmonických zložiek F_{on} Fourierovho radu pre maticu

budenia \tilde{F}_{on} v pohybovej rovnici $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = \sum_{n=0}^R \tilde{F}_{on} e^{jn\omega t}$, kde c je tlmenie

Náhodné (stochastické) budenie (signál)

Priebeh výchylky sa neopakuje pravidelne

Spojité stacionárny, ergodický náhodný signál

Všetky časové realizácie majú rovnaké štatistické charakteristiky (strednú hodnotu, rozptyl a efektívnu hodnotu, amplitúdové spektrum, autokorelačnú funkciu, výkonovú spektrálnu hustotu).

Spojité amplitúdové spektrum

Zobrazuje výraznosť jednotlivých frekvenčných zložiek v signále náhodného budenia. Konštantné spojité amplitúdové spektrum je biely šum.

Autokorelačná funkcia

Z priebehu autokorelačnej funkcie, ktorá vyjadruje vzájomnú súvislosť hodnôt signálu náhodného budenia pre rôzne časové oneskorenia, môžeme zistiť prípadnú periodicitu.

Výkonová spektrálna hustota

Zobrazuje rozloženie výkonov jednotlivých frekvenčných zložiek kmitania pri náhodnom budení.

Fourierova transformácia náhodného signálu

Náhodný signál s konečnou dĺžkou trvania môžeme deterministicky nahradiť súčtom viacerých sínusoviek s rozdielnou amplitúdou, frekvenciou a fázou.

Diskrétna Fourierova transformácia náhodného signálu

Spojité náhodné signály s konečnou dĺžkou trvania (perióda T) môžeme diskretizovať tak, že ho nahradíme počtom n hodnôt podľa zvoleného časového kroku.

Diskretizácia sústavy so spojitými rozloženými parametrami je možná formou:

- explicitnej náhrady tuhými telesami, alebo hmotnými bodmi, ktoré sú spojené nehmotnými pružnými a tlmiacimi prvkami (MBS model),
- implicitnej náhrady diferenciálnymi, alebo integrálnymi rovnicami (FEM model) kombinovanej
- explicitnej náhrady s modálnou reprezentáciou poddajných telies (MBS a .mnf súbory), náhrady komponentov (tlmiče, pružné uloženia, pneumatiky)
- empirickým dynamickým modelom (EDM) na základe metódy neurónových sietí a podľa výsledkov laboratórnych meraní, ktorý umožňuje skúmať vlastnosti budúceho vozidla amplitúdovou a frekvenčnou odozvou.

Laplaceova transformácia časovej odozvy do stavového priestoru

Počítačom podporovaná analýza a optimalizácia vlastností dynamických systémov priamo súvisí s potrebou riešiť systém diferenciálnych rovníc. Ukázalo sa, že pre lineárne, prípadne linearizované mechatronické systémy je výpočtovo výhodné pretransformovať systém diferenciálnych rovníc opisujúcich časovú odozvu systému Laplaceovou transformáciou do stavového priestoru na systém algebrických rovníc, v ktorých sa čas nevyskytuje, aby sme pomocou prenosovej funkcie mohli priamo sledovať vzťah medzi vstupom a výstupom, pričom pri transformácii diferenciálnych rovníc na algebrické využívame exponenciálne funkcie, lebo ich n -té derivácie sú n -násobkom východiskovej funkcie.

Laplaceova transformácia $L\{f(t)\}$, teda obraz $F(s)$ časovo závislej funkcie $f(t)$ (originálu) do komplexnej s -oblasti je vo všeobecnosti daná vzťahom:

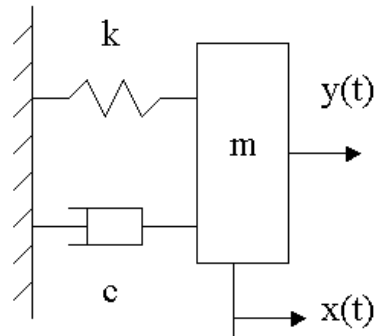
$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Fourierova modifikácia Laplaceovej transformácie do Gaussovej roviny

Pri Laplaceovej transformácii utvorením obrazu originálu vzniká algebrický výraz s komplexným argumentom $s = r + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, ktorý neposkytuje fyzikálnu predstavu o zobrazovanej funkcii. Vzhľadom na to, že spojitý aj nespojitý signál môžeme charakterizovať amplitúdovými a frekvenčnými vlastnosťami, potom pomocou Fourierovej transformácie

$$F\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

pre $s = j\omega$ modifikujeme Laplaceovu transformáciu s komplexným argumentom tak, aby argument s nebol komplexné číslo. Získané amplitúdovo-fázové spektrum frekvenčných charakteristík nám už poskytuje fyzikálnu predstavu o zobrazovanej funkcii. Ďalšími alternatívami grafického zobrazenia spektra signálu sú jeho amplitúdovo-frekvenčná charakteristika a fázovo-frekvenčná charakteristika.



Obr.1 Lineárna sústava s hmotnosťou m , súčiniteľom c viskózneho tlmenia a tuhosťou k , pričom $x(t)$ je odozva na budenie $y(t)$.

Diferenciálna rovnica pre mechanický systém druhého rádu na obr.1 dáva do súvisu vstupné budenie $y(t) = Fe^{j\omega t}$ a výstupné premiestnenie $x(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t}$$

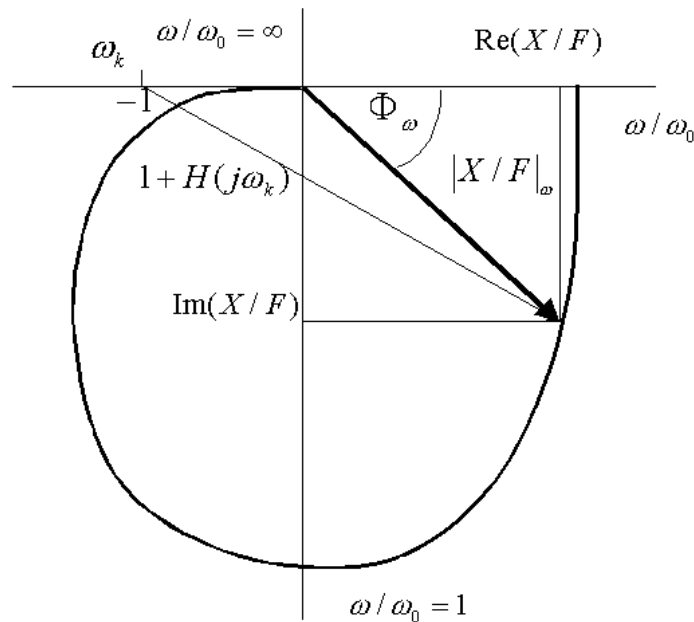
Z predpokladaného riešenia v tvare $x = Xe^{j\omega t}$ získame vektor X/F v komplexnej Gausovej rovine na obr.3, kde jeho koncové body ležia na Nyquistovej krivke geometrického obrazu frekvenčnej charakteristiky frekvenčného prenosu

$$H(j\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 - jc\omega} = |X/F|_{\omega} e^{j\Phi_{\omega}}$$

kde výraz $k - m\omega^2 - jc\omega$ je dynamická tuhosť sústavy a fázový uhol Φ_{ω} odozvy vyplýva zo vzťahu

$$\operatorname{tg}\Phi_{\omega} = \frac{k - m\omega^2}{c\omega}$$

Nyquistov hodograf amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky je na obr.3



Obr.3 Nyquistova krivka geometrického obrazu spektra frekvenčnej charakteristiky frekvenčného amplitúdovo-fázového prenosu v Gaussovej komplexnej rovine

Prenosové funkcie medzi vstupným budením a výstupnou odozvou

Zosilnenie (gain) signálu je lineárny operátor pre vzťah medzi jedným vstupným budením a výstupnou odozvou, ktorý v lineárnych jednorozmerných stacionárnych systémoch poskytujú lineárne diferenciálne rovnice. Systém má vlastnú odozvu vtedy, ak na neho nepôsobí žiadne vstupné budenie, ktoré by vyvolávalo zmenu parametrov odozvy, naopak, vynútená odozva nastáva, ak budenie odozvu ovplyvňuje. Prechodová odozva má priebeh od jednorázového náhleho vybudenia (skokom, impulzom, alebo nábehom) po ustálený stav.

Pre analýzu vlastností dynamického systému je výhodné namiesto diferenciálnej rovnice poznať algebrickú prenosovú funkciu systému, ktorá transformuje ľubovoľný vstup na výstup. Na získanie prenosovej funkcie treba Laplaceovou transformáciou pretransformovať diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje časový priebeh odozvy, na algebrickú rovnicu s komplexnou Laplaceovou premennou $s = r + j\omega$, kde $j = \sqrt{-1}$. Pre lineárne systémy je potom obrazový prenos daný prenosovou funkciou $H(s)$:

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

kde $X(s)$ je Laplaceova transformácia výstupu (odozvy) $x(t)$ a $Y(s)$ je Laplaceova transformácia vstupu (budenia) $y(t)$, pričom pre nulový vstup dostaneme nulovú odozvu.

Potom napríklad Laplaceova transformácia jednotkového skokového impulzu $f(t) = 1$ bude

$$F(s) = \frac{1}{s}.$$

Pri určení prenosovej funkcie pre mechanický systém druhého rádu na obr.1, vzťah medzi vstupom $y(t)$ a výstupom $x(t)$ opisuje vo všeobecnosti diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y, \text{ kde } a_2 = m \text{ (hmotnosť), } a_1 = c \text{ (tlmenie), } a_0 = k \text{ (tuhosť).}$$

Potom je $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ vlastná frekvencia netlmeného systému a $c_p^2 = \frac{c^2}{4km}$ je pomerné tlmenie, pričom pre $c_p > 1$ má systém nadkritické tlmenie, pre $c_p = 1$ kritické a pre $c_p < 1$ podkritické tlmenie. Vzhľadom na to, že Laplaceova transformácia prvej derivácie funkcie $f(t)$ je

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0).$$

a analogicky pre druhú deriváciu je

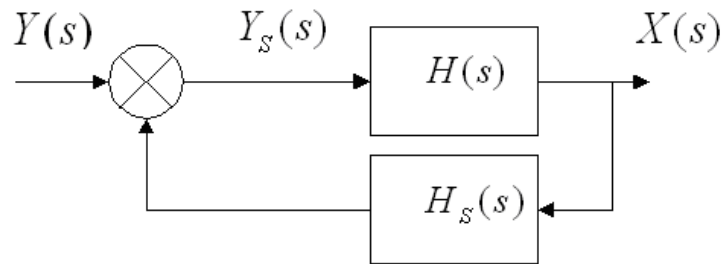
$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

potom Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice druhého rádu s nulovými začiatočnými podmienkami na algebrickú prenosovú funkciu systému bude:

$$a_2s^2X(s) + a_1sX(s) + a_0X(s) = b_0Y(s)$$

a príslušná prenosová funkcia $H(s)$ od vstupu $Y(s)$ po výstup $X(s)$ bude mať tvar:

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$



Obr.2 Dynamický systém so spätnou väzbou

Pre systém so spätnou väzbou na obr.2 bude výsledná prenosová funkcia H_V :

$$H_V(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)H_s(s)}$$

kde $H(s)$ je prenosová funkcia od vstupu $Y_s(s) = Y(s) - H_s(s)X(s)$ po výstup $X(s)$ a $H_s(s)$ prenosová funkcia spätnej väzby.

Stabilita dynamického systému

Ak prenosovú funkciu $H(s)$ vyjadríme pomocou polynómov $R(s)$ a $S(s)$ n -tého stupňa

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{R(s)}{S(s)}$$

potom z homogénnej rovnice $S(s)X(s) = 0$ získame charakteristickú rovnicu

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Systém je stabilný, ak po vychýlení impulzom z rovnovážnej polohy a prechodovom režime nezmení výrazne pôvodnú polohu, vtedy všetky korene $s_i = r_i + j\omega_i$ charakteristickej rovnice obsahujú záporné reálne zložky. Stabilný otvorený systém bude stabilný aj po jeho uzatvorení zápornou spätnou väzbou (obr.2) ak Nyquistov hodograf amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky na obr.3 neobsahuje bod $(-1, j0)$.

Frekvenčná odozva

Mechatrické systémy majú často sínusový vstup. Ak uvažujeme sínusový vstup $y(t) = \sin \omega t$ s jednotkovou amplitúdou, potom vzhľadom na to, že všetky derivácie sínusového vstupu majú tú istú frekvenciu, ustálený výstup $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ bude mať tú istú frekvenciu ako vstup, ale bude mať rozdielnu amplitúdu A a fázový uhol φ .

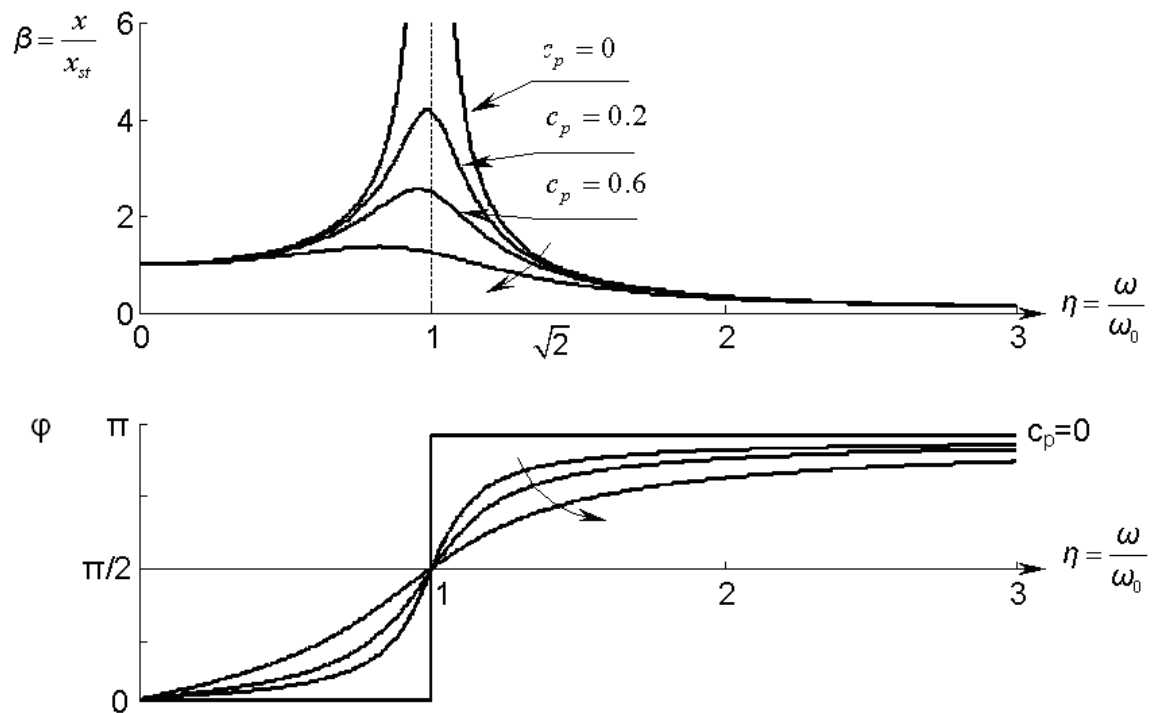
Ak na mechanický systém druhého rádu na obr.1 bude pôsobiť harmonické vstupné budenie $y(t) = F \sin \omega t$, výstupné premiestnenie $x(t)$ získame z diferenciálnej rovnice

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \omega t$$

Frekvenčnú charakteristiku mechanického systému ako odozvu na harmonické budenie s premenlivou frekvenciou ω znázorňujeme jednak vo forme amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky na obr.4, kde na horizontálnej osi je súčiniteľ naladenia $\eta = \omega / \omega_0$ (ω_0 je vlastná kruhová frekvencia netlmenej sústavy) a na zvislej osi je súčiniteľ dynamického zosilnenia $\beta = x / x_{st}$ (x_{st} je statická deformácia) amplitúdy kmitania, ako aj príslušnej fázovo-frekvenčnej charakteristiky, kde je na zvislej osi fázový uhol φ .

Ak na signály výstupu $x(t)$ a vstupu $y(t)$ aplikujeme Fourierovu transformáciu kde $s = j\omega$, potom získame frekvenčný prenos daný prenosovou funkciou $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}$$



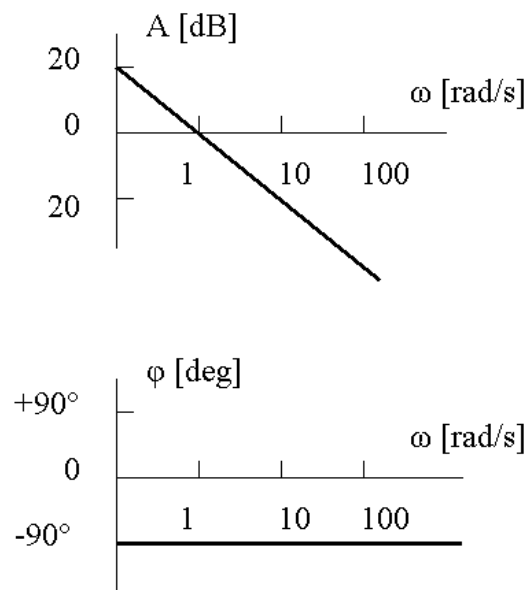
Obr.4 Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika a fázovo-frekvenčná charakteristika odozvy na harmonické budenie s premenlivou frekvenciou ω a s premenlivou hodnotou pomerného tlmenia c_p .

Frekvenčnú odozvu mechanického systému, na ktorý pôsobí sínusový vstupný signál s jednotkovou amplitúdou a meniacou sa frekvenciou, môžeme znázorniť Bodeho dvojicou priebehov, a to jednak amplitúdy odozvy, ako aj fázového uhla v logaritmickom meradle.

Napríklad systém s prenosovou funkciou $H(s) = \frac{1}{s}$ má funkciu frekvenčnej odozvy

$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ s veľkosťou amplitúdy $A = \frac{1}{\omega}$, teda v dB je to $A = -20 \lg \omega$ a fázový uhol φ

na obr.5 bude pre všetky frekvencie $\varphi = 90^\circ$.



Obr.5 Bodeho priebehy amplitúdy A odozvy ako aj fázového uhla φ v logaritmickom meradle

Stavová reprezentácia lineárnych systémov

Vlastnosti jednorozmerného aj viacrozmerného lineárneho systému so sústredenými parametrami môžeme analyzovať aj pomocou zápisu do vektorových stavových rovníc

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{y}(t)$$

kde

$\mathbf{y}(t)$ je stĺpcový vektor vstupných signálov budenia,

$\mathbf{x}(t)$ je stĺpcový vektor výstupných signálov odozvy,

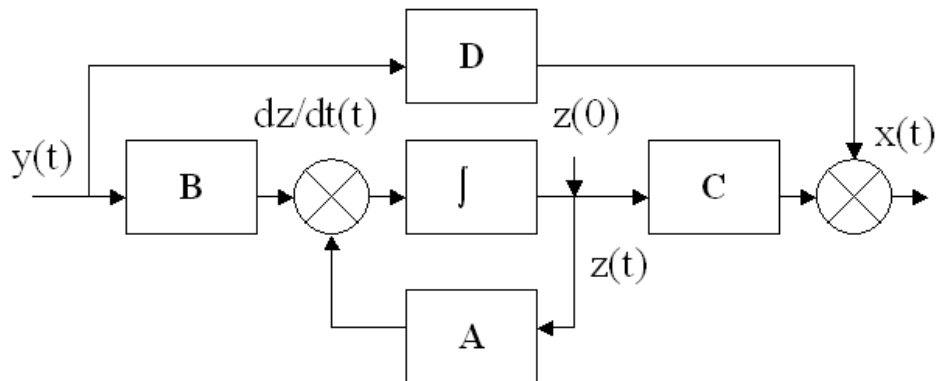
$\mathbf{z}(t)$ je stĺpcový vektor počtu n stavových premenných systému,

$\mathbf{A}(t)$ je matica koeficientov systému,

$\mathbf{B}(t)$ je matica budenia,

$C(t)$ je matica odozvy a
 $D(t)$ je prenosová matica.

Odpovedajúca schéma stavového opisu lineárneho systému je na obr.6.



Obr.6 Schéma stavového opisu lineárneho systému

Pre frekvenčnú analýzu lineárneho systému je vhodná Laplaceova transformácia jeho stavových rovníc z časovej do komplexnej s oblasti

$$s\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{B}Y(s)$$

$$X(s) = \mathbf{C}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{D}Y(s)$$

Pre nulové začiatkové podmienky $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$ dostaneme prenosovú maticu

$$\mathbf{H}(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

kde \mathbf{E} je jednotková matica typu $n \times n$. Vlastné tvary systému, ktoré sú citlivé na budenie pri frekvenčnej analýze môžeme identifikovať pomocou modálnych súradníc

$$\mathbf{Z}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}Y(s)$$

Spektrálnu výkonovú (amplitúdovú) hustotu (PSD) amplitúd $\mathbf{X}_{PSD}(s)$ vo výstupných kanáloch pre danú diagonálnu maticu $\mathbf{Y}_{PSD}(s)$ spektrálnej výkonovej hustoty (PSD) vo vstupných kanáloch získame pomocou prenosovej matice $\mathbf{H}(s)$ a k nej komplexne konjugovanej matice $\mathbf{H}^*(s)$

$$\mathbf{X}_{PSD}(s) = \mathbf{H}^*(s)\mathbf{Y}_{PSD}(s)\mathbf{H}(s)$$

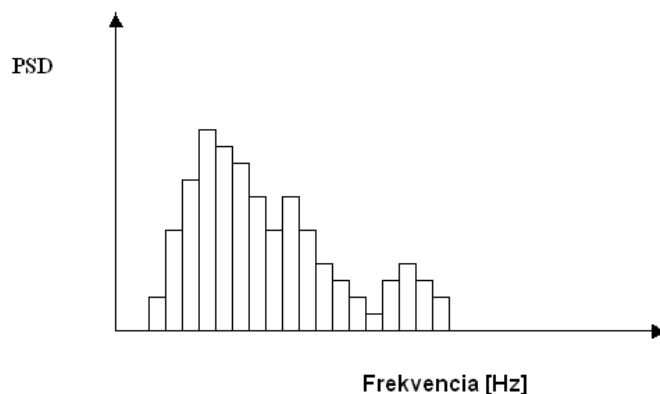
Výhodou stavovej reprezentácie systému je, že je vhodná pre analytické riešenie, optimalizačný proces ako aj pre počítačom podporované modelovanie a numerické riešenie, pričom poskytuje celkový pohľad na vlastnosti systému, riaditeľnosť ako aj zobrazovanie priebehov procesov.

Náhodné kmitanie

Únavové poškodenie súčiastok strojov spôsobuje premenlivé dynamické zaťaženie súvisiace s kmitaním. Už aj malé zmeny teploty vyvolávajú zmeny napätia v zdanlivo nehybnej konštrukcii. Je ťažko sledovať pôsobenie dynamického zaťaženia, ktoré sa veľmi pomaly a pravidelne mení a platí to aj pre zaťaženie, ktoré je síce zreteľné, ale mení sa náhodne tak, že jeho každý časový záznam je iný.

Z dlhých časových priebehov náhodného kmitania je ťažko zistiť jeho charakteristické vlastnosti a porozumieť miere jeho vplyvu na sústavu viazaných telies, preto ho spracovávame štatisticky a pretransformovávame z časovej do frekvenčnej oblasti, v ktorej môžeme odhaliť spoločné charakteristické vlastnosti vždy rôznych časových záznamov náhodného kmitania. Zásadou rýchlej Fourierovej analýzy (FFT) časového priebehu náhodného kmitania máme možnosť nahradiť ho deterministicky súčtom skupiny sínusových časových priebehov s vhodnými amplitúdami (výkmitmi), frekvenciami a fázovými uhlami. Nakoľko FFT každého sínusového priebehu kmitania zo skupiny má vlastnosť komplexného čísla a obsahuje informáciu o jeho amplitúde aj o jeho fáze, máme možnosť zobrazit' dva frekvenčne závislé priebehy, jeden amplitúdový a druhý fázový, ale vzhľadom na náhodný charakter priebehu začiatočných fázových uhlov skupiny sínusových časových priebehov, pre analýzu náhodného kmitania využívame amplitúdový prebeh.

Frekvenčne závislú ekvivalentnú reprezentáciu získaných sínusových časových priebehov urobíme pomocou frekvenčne závislej funkcie spektrálnej výkonovej (amplitúdovej) hustoty (PSD - Power Spectral Density) amplitúd týchto priebehov.



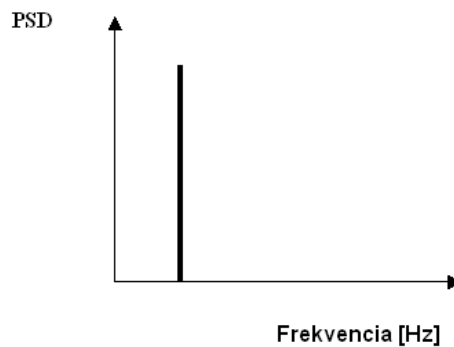
Obr.7 Frekvenčne závislá funkcia spektrálnej výkonovej (amplitúdovej) hustoty (PSD) amplitúd sínusových časových priebehov z rýchlej Fourierovej analýzy (FFT) časového priebehu náhodného kmitania.

Každá špička v priebehu PSD na obr.7 sa nachádza v mieste frekvencie jedného zo skupiny sínusových priebehov a plocha pod špičkou v priebehu PSD sa rovná strednej kvadratickej

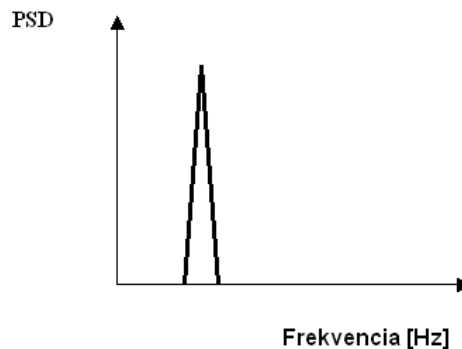
hodnote amplitúdy sínusového priebehu s danou frekvenciou za čas T , teda symbolicky platí, že:

$$PSD = \frac{1}{2T} |FFT|^2$$

Reprezentáciou sínusového časového priebehu veličiny vo forme PSD by mal byť teoreticky nekonečne vysoký a nekonečne úzky obdĺžnik, ale výsledkom numerického spracovania priebehu náhodnej veličiny má špička PSD na obr.8 konečnú výšku aj šírku.



Obr.8 Spektrálna výkonová (amplitúdová) hustota (PSD) amplitúd sínusového časového priebehu veličiny.

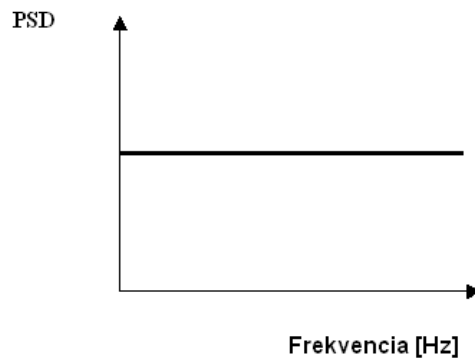


Obr.9 Úzky trojuholníkový priebeh spektrálnej výkonovej (amplitúdová) hustoty (PSD) amplitúd časového priebehu veličiny.

Úzkopásmový filter časového priebehu náhodnej veličiny vygeneruje úzky trojuholníkový priebeh PSD (obr.9), naopak širokopásmový filter vygeneruje vo frekvenčnom pásme široký trojuholník PSD, alebo viacero trojuholníkov s rôznou výškou.

Biely šum na obr.10 je časový priebeh zo sínusoviek v celom frekvenčnom pásme a má konštantú hodnotu spektrálnej výkonovej (amplitúdovej) hustoty (PSD) amplitúd časového priebehu veličiny.

Z priebehu PSD môžeme inverznou rýchlou Fourierovou analýzou spätne získať časový priebeh náhodnej veličiny, ktorý je však s pôvodným časovým priebehom ekvivalentný len štatisticky.



Obr.10 Biely šum

Matematické modely mechatronických systémov pre počítačovú podporu pri vývoji výrobkov

Cestou k hlbšiemu pochopeniu a predikovaníu vlastností správania sa mechatronického systému v rôznych prevádzkových režimoch je analýza jeho matematického modelu vo forme rovníc, ktoré dávajú do súvisu vzťah medzi vstupom a výstupom. Virtuálny model skladáme zo základných stavebných prvkov, z ktorých má každý jednu vlastnosť, preto ho nazývame systém s diskretnými (sústredenými) parametrami. Stavebné prvky mechanických modelov sú pružiny, ktoré dynamicky ekvivalentne reprezentujú tuhosť reálneho systému, tlmiče predstavujú trecie a tlmiace sily pôsobiace proti rýchlosti pohybu a hmotnosti zase sily zotrvačného odporu proti zrýchleniu telies.

Reálne systémy aj ich virtuálne modely majú multidisciplinárny charakter, pričom predpokladáme, že každý stavebný prvok má v operačnom bode, teda v sledovanom okamžitom stave, lineárne vlastnosti, aby sme mohli uplatniť princíp postupného skladania (superpozície) jednotlivých veličín. Aj keď má reálny systém výrazne nelineárne vlastnosti, spravidla pracuje v lineárnej oblasti rozsahu zmien parametrov okolo operačného bodu, ktorú reprezentuje dotyčnica k nelineárnemu priebehu parametra v operačnom bode. Linearizovaný model môžeme využívať aj na modelovanie riadiacich systémov, lebo tieto majú za úlohu udržiavať výstup na vyžadovanej hodnote s malými odchýlkami.

Pri utváraní virtuálneho modelu robíme vhodné zjednodušenia reálnej sústavy podľa toho aký typ analýzy hodláme uskutočniť, aby sme dostali prehľadnejšiu odozvu a zároveň akceptovateľú zhodu výsledkov simulácií s realitou. Ak chceme určiť len hodnotu rezonančnej frekvencie a skúmať odozvu systému mimo rezonančnej oblasti, často stačí pracovať s diskretizáciou spojitou rozloženej hmoty, zanedbať tlmenie, uvažovať lineárnu časť nelineárnej charakteristiky a prípadne zanedbať sily, ktoré majú malý vplyv.

Naopak ak bude systém pracovať v rezonančnej oblasti treba rátať aj s tlmením. V mnohých prípadoch stačí určiť najnižšiu vlastnú frekvenciu, nakoľko ak systém vydrží pracovať s amplitúdami kmitania a napätí pri budení s touto frekvenciou, spravidla bude odolný aj voči budeniu pri vyšších vlastných frekvenciách. Amplitúdu a frekvenciu kmitania dynamických systémov zasa ovplyvňujeme cieľenými zmenami spôsobu budenia a zmenami dynamických charakteristík prvkov systému.

Aké sú možnosti uplatnenia modulu ADAMS/Vibration.

Modul MSC.ADAMS/Vibration využívame na prípravu modelu utvoreného v prostredí MSC.ADAMS, na realizáciu frekvenčnej analýzy a pre spresnenie a optimalizáciu vlastnosti modelu tak, aby mala jeho odozva vyžadovaný priebeh. Práca vo frekvenčnej oblasti s modulom ADAMS/Vibration má v porovnaní s časovou analýzou výhodu v tom, že poskytuje rýchlejšie a názornejšie informácie o kritických prevádzkových vlastnostiach modelu. Modul MSC.ADAMS/Vibration je vhodný na hlbšie štúdium kmitania modelov pre používateľov, ktorí sa zaoberajú NVH úlohami analyticky a ktorí pracujú v programe MSC.ADAMS s pružnými telesami. Pri štúdiu možností uplatnenia modulu ADAMS/Vibration sa zameriame na to:

- aké sú možnosti uplatnenia modulu MSC. ADAMS/Vibration,
- ako pripravujeme modely v prostredí MSC.ADAMS pre analýzu kmitania,
 - vstupné a výstupné kanály,
 - budiče síl a momentov: PSD (spektrálna výkonová hustota), budiaca sila s konštantnou amplitúdou a sínusovým priebehom na prehládávanie odoziev v danom frekvenčnom spektre,
- aké sú možné druhy analýz vo frekvenčnej oblasti,
 - analýza vlastných tvarov, (Normal mode analysis),
 - analýza vynúteného kmitania, (Forced vibration analysis),
 - výpočet modálnej energie,
- aké sú rozdiely spôsobu práce a spracovania výsledkov analýz v časovej a frekvenčnej oblasti,
- ako integrujeme nástroje pre analýzu vo frekvenčnej oblasti s nástrojmi na vyhodnotenie vlastností modelu v prostredí MSC.ADAMS/View,
- aké sú špeciálne vymoženosti v module MSC.ADAMS/PostProcessor,
 - animácie: vlastné tvary, vynútené kmitanie,
 - grafy: rozloženie vlastných tvarov systému v komplexnej rovine (system modes), frekvenčná odozva (frequency response), prenosová funkcia (transfer function), výstupná spektrálna výkonová hustota (output PSD), modálne súradnice (modal coordinates), modálne príspevky (modal participations).

Popri základných možnostiach prípravy modelu a jeho analýz vo frekvenčnej oblasti môžeme pre štúdie vplyvu zmien parametrov (Design Study) vytvoriť potrebné makro (Create Vibration Design Objective Macro), ako aj pripraviť dávkové spracovanie analýz pomocou súboru Python script utvoreného podľa syntaxe v ADAMS/Vibration Python API, čo je rozhranie pre aplikačné programy (Application Program Interface). Na každej používateľskej úrovni práce s programom MSC.ADAMS je viacero alternatívnych možností, ktoré nám umožňujú analyzovať vlastnosti budúceho výrobku z viacerých hľadísk. Sústavu z obr.1 môžeme vytvoriť zo systémových modelovacích prvkov (System Elements: state variables, arrays, matrices, implicit and explicit differential equations, linear state equations and transfer function) jednak pomocou dvoch diferenciálnych rovníc, alebo lineárnymi stavovými rovnicami pomocou matíc $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$, ako aj pomocou prenosovej funkcie.

Aj v prostredí modulu MSC.ADAMS/PostProcessor máme na filtrovanie signálu k dispozícii jednak

- metódu kontinuálneho filtrovania s možnosťami
 - transformovať časový signál do frekvenčnej oblasti rýchlou Fourierovou transformáciou FFT,
 - násobiť výslednú funkciu filtrovacou funkciou,
 - uskutočniť inverznú FFT,
- ako aj metódu diskretného filtrovania priamo v časovej oblasti. Filtrovaný signál je v každom časovom kroku lineárnou kombináciou predošlých vstupných a výstupných signálov s diskretnou prenosovou funkciou.

Bodeho dvojice priebehov amplitúdy odozvy, ako aj fázového uhla v logaritmickej mierke môžeme vygenerovať podľa toho, či reprezentujeme systém pomocou prenosových funkcií, stavovými maticami, alebo dvojicou signálov zo vstupného a výstupného kanála.

Ako hodnotíme jazdné pohodlie a jazdnú istotu dopravných prostriedkov

Kvalitu dopravných prostriedkov posudzujeme hlavne podľa toho, aké poskytuje jazdné pohodlie (komfort), teda ako vodič vníma a hodnotí pôsobenie budiacich síl v miestach jeho kontaktu s vozidlom (volant, sedadlo, podlaha) a akú poskytuje jazdnú istotu, teda aký je priebeh dynamických normálových síl v kontakte pneumatiky s cestou počas rôznych jazdných režimoch. Pri hodnotení jazdného komfortu aj jazdnej istoty vozidla zohrávajú rozhodujúcu úlohu dynamické vlastnosti pružných prvkov (gumené uloženia, hydrouloženia, kovové pružiny, olejové tlmiče, vzduchové pružiny), preto sa pozornosť vývojárov sústredila na skúmanie možností ich optimalizácie.

Napriek tomu, že reálna mechanická sústava vozidla je nelineárna so spojito rozloženými parametrami, ak jej pružné vlastnosti majú relatívne malé nelinearity, potom môžeme modelovať virtuálny model vozidla ako sústavu s diskretno rozloženými parametrami. Pri určovaní dynamických vlastností modelu vozidla (priebeh rozbehu a jazdných režimov, odozvy na budenie,...) využívame časové a frekvenčné lineárne prenosové dynamické charakteristiky (dynamická poddajnosť) ako operátory, ktoré vstupom priradia výstupy.

Pri počítačovej optimalizácii vlastností dynamického modelu vozidla v prostredí programu MSC.ADAMS kombinujeme štatistické a pravdepodobnostné metódy so spektrálnou a modálnou analýzou vlastných frekvencií a vlastných tvarov ako aj s analýzou vynúteného kmitania od periodického pohybu nevyvážených hmôt motora (piesty, ojnice, kľukový hriadeľ), od síl vznikajúcich pri spaľovaní vo valci aj od síl interakcie vozidla s cestou. Pružné prvky spojenia motora a zavesení kolies s karosériou vozidla modelujeme ako sily s nelineárnymi charakteristikami, pričom môžu byť funkciami premiestnení, alebo rýchlostí.

Algoritmy programu MSC.ADAMS pri modálnej analýze dynamického modelu vozidla linearizujú nelineárne vlastnosti tuhosti a tlmenia pružných prvkov v zvolenom pracovnom bode celej sústavy, pričom prijateľné výsledky získavame v rovnovážnej polohe systému. Z matematického hľadiska príslušné algoritmy pretransformujú zmiešanú sústavu diferenciálnych a algebrických rovníc (DAE) druhého rádu na sústavu dynamických a kinematických obyčajných diferenciálnych rovníc ODE prvého rádu, pričom rýchlosti budú vystupovať v stavových premenných a zrýchlenia vyplynú z derivácie rýchlostí. Analýza vynúteného kmitania je výpočtovo náročnejšia ako modálna analýza, lebo sústavu DAE rovníc treba riešiť metódou BDF s prediktorom a korektorom, pričom vzorkovacia

frekvencia musí byť dvakrát vyššia ako je najvyššia aktívna frekvencia. Čím je rád k aproximačného BDF polynómu väčší ako 1, tým väčšie sú oblasti nestability riešenia v zápornej časti komplexnej roviny.

Vlastné frekvencie stabilnej linearizovanej mechanickej sústavy musia mať reálnu časť zápornú čo v praxi znamená, že v takejto sústave sa budiaci impulz utlmí za krátky čas. Reálna časť vlastných hodnôt súvisí s tlmením a imaginárna časť vlastných hodnôt závisí od fázového uhla oneskorenia odozvy voči budeniu čo súvisí s tlmenou vlastnou frekvenciou, ktorou dynamický systém kmitá pri vlastnom tvare. Pri skúmaní odozvy dynamického systému na náhodné budenie nepoužívame priamo časové priebehy budenia, ale odpovedajúce štatistické charakteristiky.

Vozidlo by malo spĺňať požiadavky na jazdný komfort a jazdnú bezpečnosť vozidla, teda aby vhodne filtrovalo prenos budiacich síl od kontaktu kolies s cestou a od motora do kontaktných miest s vodičom a aby zachovávalo kontakt kolesa s cestou. Výskum budenia vozidla od vertikálnych síl vyústil do spracovania noriem VDI 2057 či ISO/2631 pre hodnotenie komfortu na základe kriviek konštantnej citlivosti človeka na vertikálne kmitanie sedadla pri rôznych frekvenciách. Ak chceme dosiahnuť, aby vozidlo pri stochastickom budení od cesty aj pri prejazde jednotlivých prekážok poskytovalo čo najlepšie jazdné pohodlie, na skúmanie týchto prípadov treba využiť nelineárne modely pružných prvkov. Do virtuálnych modelov náprav v súčasnosti zakomponovávame modely hydrouložení, pružných uložení s trením, vzduchových pružín a dorazov.

Požiadavkou dynamickej optimalizácie jazdného pohodlia vozidla je, aby vlastné frekvencie odpovedajúcej dynamickej sústavy vozidla s motorom ležali v rozmedzí medzi 8 - 15 Hz, pričom musia byť navzájom oddelené. Dôvodom je, aby sa nevybudili vlastné frekvencie ľudských orgánov, ktoré sú v pásmach 4 - 8 Hz a 15 - 60 Hz pri zvislom budení a 1 - 3 Hz pri horizontálnom budení. Pružné prvky uloženia motora na rám by teda mali mať nízku tuhosť a tlmenie, aby účinne izolovali vysokofrekvenčné budenie s malou amplitúdou pri voľnobežných otáčkach motora s budiacou frekvenciou okolo 20Hz, ale zároveň by mali mať vysokú tuhosť aj tlmenie, aby tlmili nízkofrekvenčné budenie od cesty s frekvenciou pod 8Hz a veľkou amplitúdou. Najst' kompromis medzi týmito protichodnými požiadavkami umožňujú nelineárne vlastnosti hydrouloženia s možnosťou optimalizácie jeho priebehu tuhosti aj tlmenia.

Literatúra

- [1] Bolton, W. (1999): Mechatronics. Electronic control systems in mechanical and electrical engineering, Addison Wesley Longman Limited.
- [2] Inman, Daniel, J. (2001) : Engineering Vibration, Prentice Hall, Inc.
- [3] Starek, Ladislav (2001): Kmitanie mechanickej sústav, Edičné stredisko STU Bratislava.