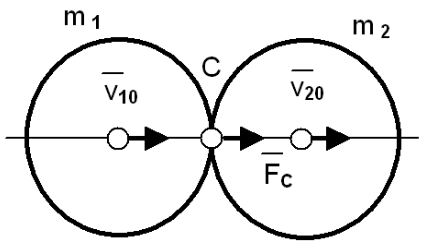
Technická mechanika II
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

8. Cvičenie: Dynamické kontaktné sily.
Prednáška: Teória nárazu telies, priamy a excentrický náraz, stred nárazu rotačne viazaného a voľného telesa.

S1 Priamy náraz. Newtonova teória nárazu. Súčiniteľ reštitúcie.

Priamy náraz

Pri priamom náraze je nositeľka sily nárazu $\overline{F}_C$ zhodná (kolineárna) s nositeľkami začiatočných rýchlostí $\overline{v}_{10}$, $\overline{v}_{20}$ (pred priamym nárazom) hmotných bodov m_1 a m_2, pričom $\overline{v}_{10} > \overline{v}_{20}$.



Obr.1 Začiatočné rýchlosti $\overline{v}_{10}$, $\overline{v}_{20}$ pred priamym nárazom.

Newtonova teória

Počas nárazu, ktorý trvá asi $\tau = 10^{-9}$ s zanedbávame vonkajšie akčné sily, trenie aj premiestnenia telies. Nakoľko pri náraze pôsobí len vnútorná sila nárazu $\overline{F}_C$, potom veľkosť dráhovej hybnosti $H = \sum_{i=1}^{m} m_i v_i$ sústavy (linear momentum) pred nárazom aj po náraze bude konštantná $H = \text{konst.}$. Z tohoto zákona zachovania hybnosti (LMB) vyplýva:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{1}$$

kde v_1, v_2 sú konečné veľkosti rýchlostí v čase τ po náraze. Spoločnú rýchlosť v_C po prvej časti nárazu (obr.2) v čase t_1 môžeme vyjadriť z rovnice:

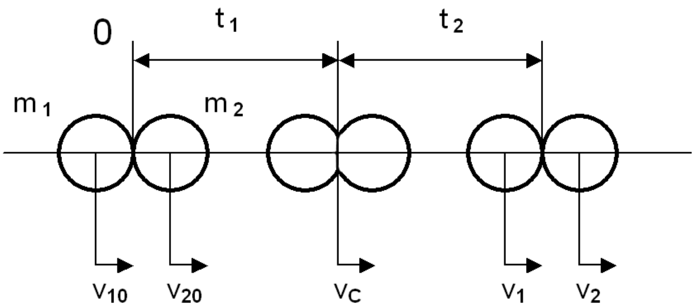
$$-m_1(v_C - v_{10}) = m_2(v_C - v_{20}) \tag{2}$$

$$v_C = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

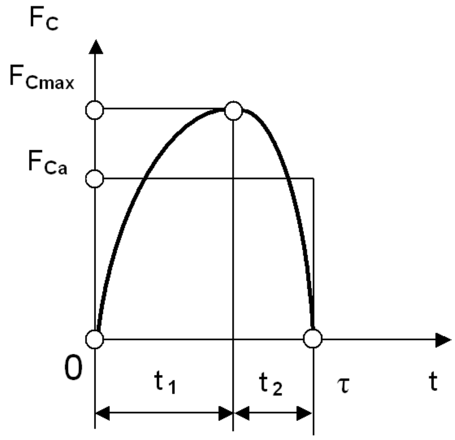
Súčiniteľ ε reštitúcie

Vplyv pružnosti rôznych materiálov narážajúcich reálnych telies zohľadňuje súčiniteľ reštitúcie $\varepsilon > 0$ ako pomer relatívnej rýchlosti pred nárazom $v_{0\,rel}$ a po náraze v_{rel}

$$\varepsilon = -\frac{v_1 - v_2}{v_{10} - v_{20}} = -\frac{v_{rel}}{v_{0\,rel}} \tag{4}$$



Obr.2 Fázy pri priamom náraze.



Obr.3 Časový priebeh sily nárazu.

Príklad 1

Padajúca gulička (obr.4) má začiatočnú rýchlosť v_{10}

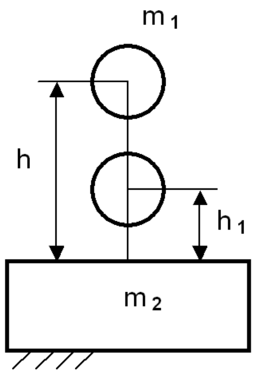
$$v_{10} = \sqrt{2gh}$$

a rýchlosť v_1 po náraze

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Potom súčiniteľ reštitúcie ε bude

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$$



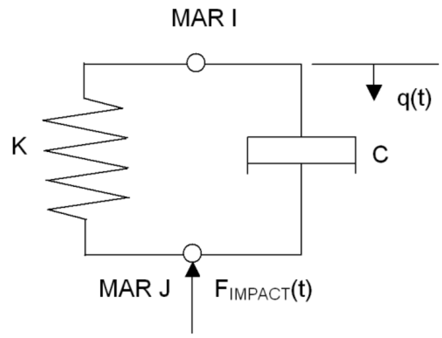
Obr.4 Gulička padajúca na podlahu.

V prípade ideálne pružného nárazu (bez úbytku energie) je $\varepsilon = 1$, a naopak v prípade úplne plastického nárazu (celá pohybová energia sa premení na deformačnú prácu) je $\varepsilon = 0$. Vo všeobecnosti je náraz čiastočne pružný, teda $0 < \varepsilon < 1$.

S2 Model sily jednostranného nárazu funkciou Impact (IMPACT function)

Model sily nárazu

Lokálna súradnicová sústava (LCF) markera I na obr.5 reprezentuje prvé teleso a druhé teleso reprezentuje LCF markera J.

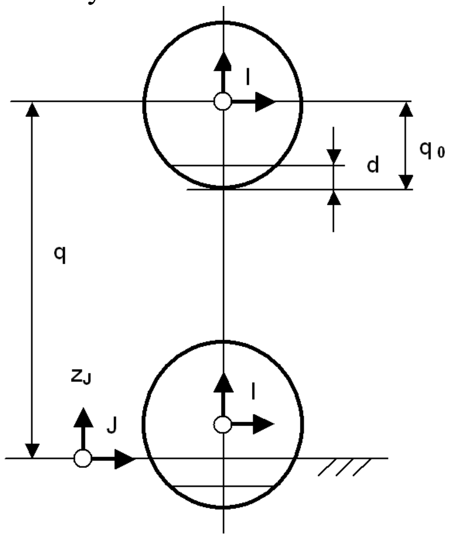


Obr.5 Model sily nárazu $F_{IMPACT} = F_K + F_C$ v programe MD.ADAMS

Model sily nárazu sa skladá zo sily $F_C = Kq$ v tlačnej pružine a zo sily $F_C = C\dot{q}$ v tlmiči:

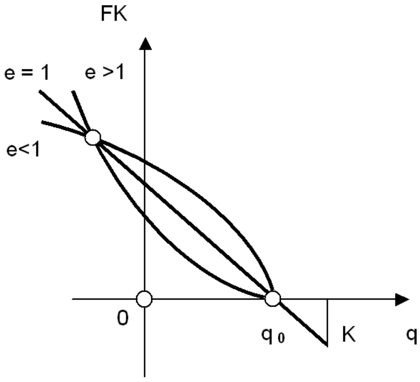
$$F_{IMPACT} = Kq - C\dot{q} \qquad (5)$$

Funkcia IMPACT v prostredí programu MD.ADAMS poskytuje pre veľkosť sily nárazu reálne číslo.

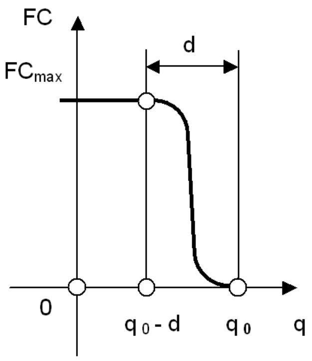


Obr.6 Poloha telesa reprezentovaného LCS (marker I) pred nárazom a počas nárazu.

Funkcia IMPACT — Formát sily nárazu IMPACT:
IMPACT (Displacement Variable q , Velocity Variable dq/dt, Trigger q_0 for Displacement Variable, Stiffness Coefficient K, Stiffness Force Exponent e, Damping Coefficient C, Damping Rampup Distance d)



Obr.7 Exponent e sily v nelineárnej pružine.



Obr.8 Hĺbka d vniknutia po max. silu tlmenia.

Argumenty — premenné veličiny funkcie IMPACT v modeli sily nárazu:

vzdialenosť q — q je vzdialenosť (súradnica polohy markera I voči J) Displacement Variable, merač vzdialenosti q medzi markermi I, J reprezentujúcimi narážajúce telesá.

rýchlosť dq/dt — dq/dt je rýchlosť (Velocity Variable), merač časovej derivácie vzdialenosti q medzi markermi I, J reprezentujúcimi narážajúce telesá.

spúšťač q_0 — q_0 je spúšťač (Trigger for Displacement Variable), dĺžka vzdialenosti markera I od markera J pri ktorej začne pôsobiť sila nárazu.

súčiniteľ tuhosti K — K je súčiniteľ tuhosti pružiny (Stiffness Coefficient),

exponent e — e je exponent pre silu v pružine (Stiffness Force Exponent),
súčiniteľ tlmenia C — C je súčiniteľ viskózneho tlmenia (Damping Coefficient),
hĺbka vniknutia d — d je hĺbka vniknutia po max. tlmenie (Damping Rampup Distance).

Rovnica pre výpočet sily — Funkcia IMPACT poskytuje nulovú (off) alebo nenulovú (on) silu v závislosti na hodnote premennej q:

$$F_{IMPACT} = \begin{pmatrix} \text{off if } q > q_0 \\ \text{on if } q \le q_0 \end{pmatrix}$$

Rovnica pre výpočet sily nárazu funkciou IMPACT:

$$IMPACT = \left(0,\ K(q_o - q)^e - C\dot{q} * STEP(q,\ q_o - d, 1, q_o, 0)\right) \qquad (6).$$

S3 Kelvinova rovnica pre úbytok kinetickej energie. Účinnosť nárazu.

Kelvinova rovnica — Počas nárazu telesa hmotnosti m, ktoré malo začiatočnú rýchlosť $\bar{v}_0$ a konečnú rýchlosť $\bar{v}$ po náraze, impulz $\bar{I}_C$ sily nárazu $\bar{F}_C$ vyvolá zmenu $\Delta\bar{H}$ dráhovej hybnosti:

$$m\,\bar{v} - m\,\bar{v}_0 = \bar{I}_C \qquad (7)$$

Vynásobením $\bar{v}_0$ a potom $\bar{v}$ dostaneme:

$$m\,\bar{v}\cdot\bar{v}_0 - m\,v_0^2 = \bar{I}_C\cdot\bar{v}_0$$

$$m\,v^2 - m\,\bar{v}_0\cdot\bar{v} = \bar{I}_C\cdot\bar{v}$$

Vynásobením ½ získame Kelvinovu rovnicu pre prácu W_C sily nárazu $\bar{F}_C$:

$$W_C = \frac{1}{2}\bar{I}_C\cdot(\bar{v}_0 + \bar{v}) = \Delta E_K \qquad (8)$$

Kinetická energia — Počas nárazu teleies hmotnosti m_1 a m_2 so začiatočnými rýchlosťami $\bar{v}_{10}$, $\bar{v}_{20}$ nastane pokles kinetickej energie.

$$E_{Ku} = E_{K0} - E_K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(1 - \varepsilon^2)(v_{10} - v_{20})^2 \qquad (9)$$

kde ε je súčiniteľ reštitúcie

Účinnosť nárazu — Účinnosť η_C nárazu môžeme vyjadriť ako pomer kinetickej energie E_{K0} pred nárazom a E_K po náraze:

$$\eta_C = \frac{E_K}{E_{K0}} = 1 - \frac{1-\varepsilon^2}{1+\frac{m_1}{m_2}} \qquad (10)$$

Príklad 2 — Pre zatĺkanie pilóty je žiaduce dosiahnuť vysokú účinnosť prenosu kinetickej energie E_K (s minimálnym úbytkom) z kladiva hmotnosti m_1 do pilóty hmotnosti m_2. Podľa rovnice (10) môžeme dosiahnuť vysokú účinnosť η_C zatĺkania ak sa bude súčiniteľ reštitúcie blížiť k číslu 1, teda $\varepsilon \to 1$ (ideále pružný náraz), teda hmotnosť kladiva m_1 bude oveľa väčšia $m_1 > m_2$ ako hmotnosť m_2 zatĺkanej pilóty, ktorá sa potom pri zatĺkaní deformuje minimálne.

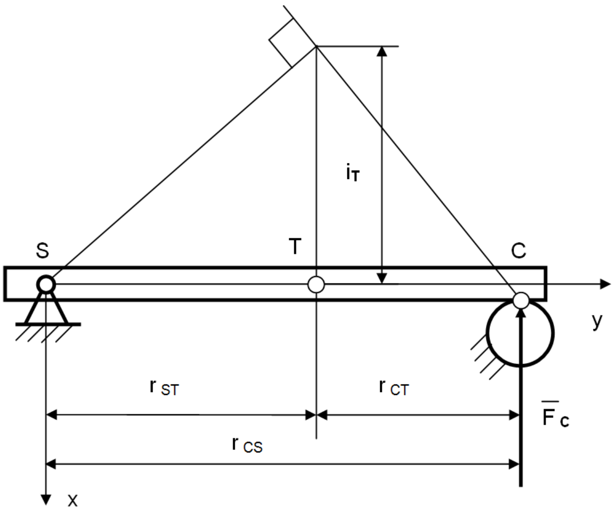
Príklad 3

Pre kovanie je žiaduce dosiahnuť čo najväčšiu deformáciu výkovku V prípade úplne plastického nárazu sa celá pohybová energia E_K premení na deformačnú prácu, teda súčiniteľ reštitúcie bude $\varepsilon = 0$. Podľa rovnice (10) pre účinnosť η_C nárazu môžeme dosiahnuť vysokú účinnosť kovania ak sa bude súčiniteľ reštitúcie blížiť k číslu 0, teda $\varepsilon \to 0$, vtedy bude hmotnosť kladiva m_1 oveľa menšia $m_1 < m_2$ ako hmotnosť m_2 výkovku, ktorý sa potom pri kovaní deformuje maximálne.

S4 Excentrický náraz. Stred nárazu.

Stred S nárazu

a) Excentrický náraz rotujúceho ramena drviča.



Obr.9 Excentrický náraz rotujúceho ramena drviča.

Rameno drviča na obr.9 hmotnosti m má pred nárazom uhlovú rýchlosť $\omega_0 = \text{const}$ a po náraze uhlovú rýchlosť ω. Ak dosiahneme aby bola rekcia $\bar{F}_S$ v geometrickej väzbe S po náraze nulová, potom bude bod S stred nárazu. Nakoľko pri náraze pôsobí len vnútorná sila nárazu $\bar{F}_C$, zo zákona zachovania uhlovej hybnosti $\bar{K}_S$ aj dráhovej hybnosti $\bar{H}_C$ pred a po náraze impulz viazaného momentu $\bar{I}_{MC}$ vyvolá zmenu viazaného momentu hybnosti $\Delta\bar{K}_S = \bar{I}_{MC} = \bar{K}_S - \bar{K}_{S0}$ a impulz $\bar{I}_C$ sily nárazu $\bar{F}_C$ vyvolá zmenu dráhovej hybnosti $\Delta\bar{H}_C = \bar{I}_C = m\,(\bar{v}_T - \bar{v}_{T0})$. V skalárnej forme: $-I_C r_{CS} = J_z(\omega - \omega_0)$

Potom $r_{CS} = \dfrac{J_z}{m\,r_{ST}}$. Zo Steinerovej vety $J_z = J_T + r_{ST}^2\, m$ a polomeru zotvačnosti $i_T = \dfrac{J_T}{m}$ dostaneme $r_{CS} = \dfrac{m\,(i_T^2 + r_{ST}^2)}{m\,r_{ST}}$, z čoho $i_T^2 = r_{ST}(r_{CS} - r_{ST})$, teda $i_T^2 = r_{ST} r_{CT}$. Potom poloha r_{CS} stredu S nárazu vyplýva z Euklidovej vety.

b) Excentrický náraz voľného telesa.

Voľné teleso v rovine na obr.10 sa bude po náraze pohybovať všeobecným pohybom, pre ktorý platí

$$\bar{v}_C = \bar{v}_T + \bar{\omega} \times (-\bar{r}_{CT})$$

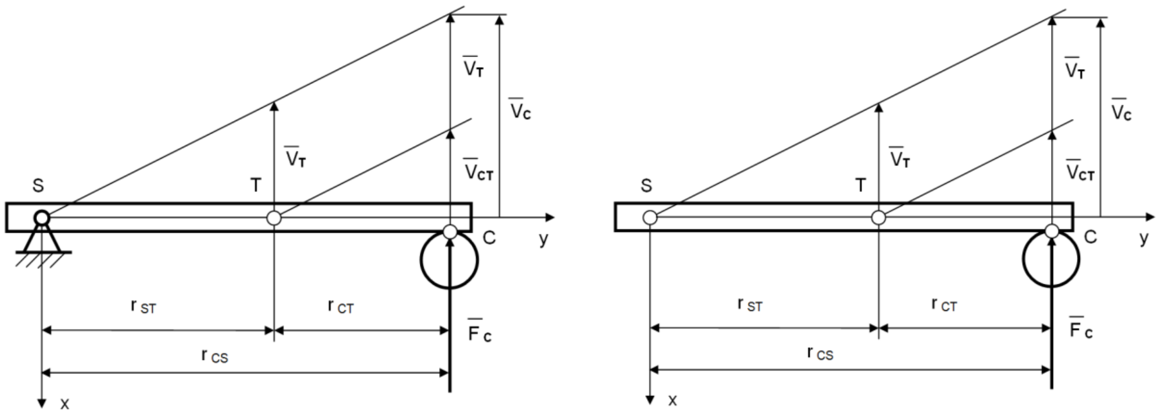
Cieľom je určiť vzdialenosť r_{CS} stredu S nárazu v ktorom je nulová rýchlosť $v_S = 0$. Z podmienky zachovania uhlovej hybnosti

$J_T\omega = -r_{CT}I_C$, po dosadení $v_C = \dfrac{I_C(i_T^2 + r_{CT}^2)}{mi_T^2}$

Z podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{v_T}{r_{ST}} = \frac{v_C}{r_{CS}}$$

Teda dostávame tú istú podmienku $i_T^2 = r_{ST}r_{CT}$ ako v prípade a).



Obr.11 a) Excentrický náraz rotačne viazaného ramena, b) voľného ramena.