Technická mechanika II
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

7. **Cvičenie: Dynamika všeobecného pohybu telesa. Sférický pohyb telesa, Eulerove uhly. Eulerove kinematické rovnice. Gyroskopický moment.**
   Prednáška: Dynamické reakcie v ložiskách, vyvažovanie tuhých rotorov. Dynamika všeobecného pohybu telesa. Sférický pohyb telesa, Eulerove uhly. Eulerove kinematické rovnice.

Dynamika všeobecného pohybu telesa.

Könitgova veta

Königova veta $E_{kV} = E_{kT} + E_{kR}$ pre celkovú kinetickú energiu valiaceho sa kolesa, $E_K = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I_{zT}\omega^2$ a časová derivácia $\dot{E}_K = \frac{1}{2}\bar{r}_T \times m v\dot{v} + \frac{1}{2}I_{zT}\omega\dot{\omega}$.

Dráhová hybnosť

Dráhová hybnosť $\bar{H}$ ťažiska T, $\bar{H} = m\bar{v}_T$, resp. $\dot{\bar{H}} = m\bar{a}_T$, kde $\bar{v}_T$ je rýchlosť a $\bar{a}_T$ je zrýchlenie ťažiska

Uhlová hybnosť

Uhlová hybnosť $\bar{K}_A = \bar{K}_{AT} + \bar{K}_{AR}$ má dve zložky:
$\bar{K}_A = \bar{r}_T \times m\bar{v}_T + I_{zT}\bar{\omega}$. Časová derivácia bude: $\dot{\bar{K}}_A = \dot{\bar{K}}_{AT} + \dot{\bar{K}}_{AR}$,
$\dot{\bar{K}}_A = \bar{r}_T \times m\bar{a}_T + I_{zT}\dot{\bar{\omega}}$, tiež $\dot{\bar{K}}_A = \bar{r}_T \times \bar{F}_T + \bar{M}_T$.

Rovnováha dráhovej hybnosti (LMB)

$\sum \bar{F}_i = m\bar{a}_T$
linear momentum balance

Rovnováha uhlovej hybnosti (AMB)

$\sum \bar{M}_{iA} = \bar{r}_T \times m\bar{a}_T + I_{zT}\dot{\bar{\omega}}$

Rovnováha výkonov (PB)

$$\bar{F}.\bar{v}_T + \bar{M}_T.\bar{\omega} = m v\dot{v} + I_{zT}\omega\dot{\omega}$$

Príklad 1

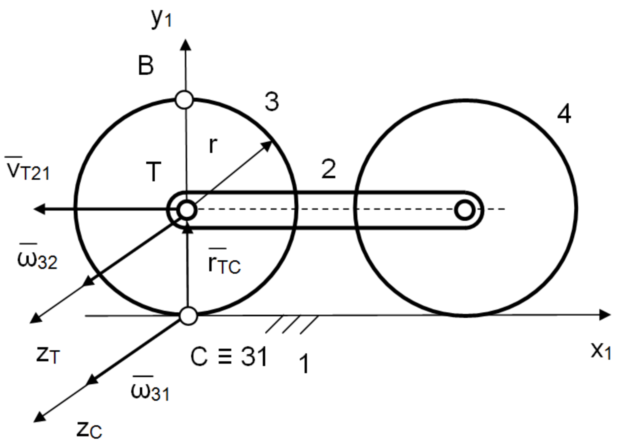
Ťažisko T kolesa 3 automobilu má danú rýchlosť $\bar{v}_{T31}$, hmotnosť m a polomer r_{TC}.

Úloha:

Vypočítajte celkovú kinetickú energiu E_{kV} kolesa 3 pri všeobecnom pohybe 3/1.

Riešenie:

Vychádzame z Königovej vety $E_{kV} = E_{kT} + E_{kR}$ pre celkovú kinetickú energiu E_{kV} kolesa 3, kde $E_{kT} = \frac{1}{2}mv_T^2$ je kinetická energia kolesa 3 pri translačnej zložke a $E_{kR} = \frac{1}{2}I_{zT}\omega_{32}^2$ je kinetická energia kolesa 3 pri rotačnej zložke všeobecného pohybu

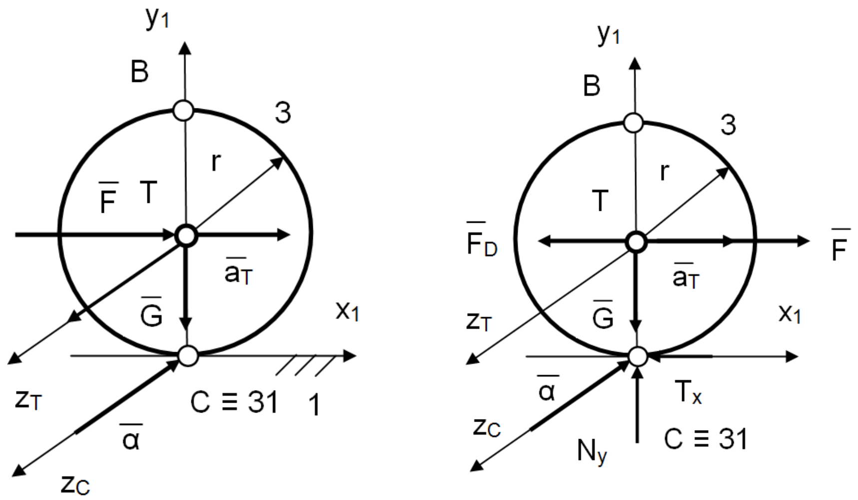


Obr. 1 Všeobecný pohyb 3/1 kolesa 3.

telesa podľa teórie rozkladu všeobecného pohybu telesa na (translačný (T) + rotačný (okolo T), ktorú navrhli Cauchy (1827) a Poisson (1834).

Príklad 2 Na ťažisko T kolesa 3 hmotnosti m a polomeru r pôsobí sila F a daný je súčiniteľ f_S šmykového trenia pri valení.

Úloha: Pri akej hodnote sily F nastane šmyk?



Obr. 2 a) sila F pôsobiaca na ťažisko T kolesa 3, b) obrázok uvoľnenia

Riešenie: Podľa obrázka uvoľnenia (Obr.2b) pre translačnú a rotačnú zložku všeobecného pohybu kolesa 3 sú rovnice rovnováhy:

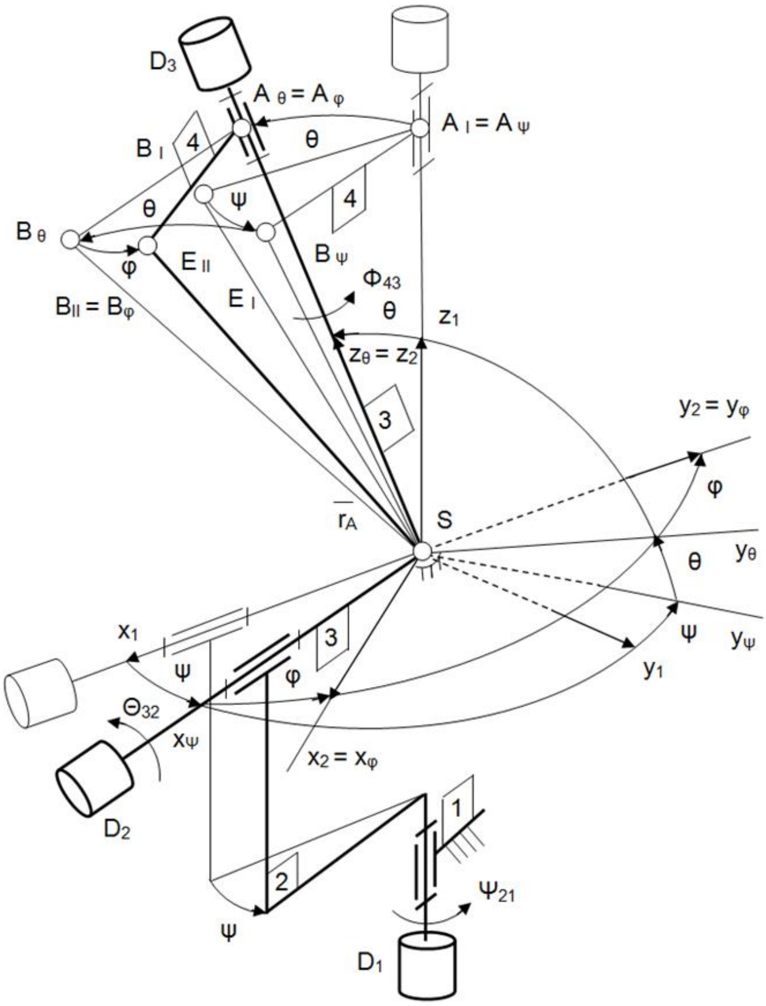
$$\sum F_{ix} = 0: \quad - ma_T + F - T_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad - G + N_y = 0$$

$$\sum M_{iT} = 0: \quad M_T = I_{zT}\alpha,$$

Vzhľadom na $I_{zT} = \frac{1}{2}mr^2$ a pre tangenciálne $a_T = r\,\alpha$ zrýchlenie ťažiska T dostaneme po úprave podmienku $F < 3\,T_x$ pre valenie a podmienku $F > 3\,T_x$ pre šmyk.

Sférický pohyb telesa, Eulerove uhly. Eulerove kinematické rovnice.



Obr.3 Polohovanie telesa SAB z východiskovej polohy SA_1B_1 do danej konečnej polohy $SA_{II}B_{II}$ sférickým premiestnením pomocou otvoreného mechanizmu.

Otvorený sférický mechanizmus (počet členov $u = 4$) s motorčekmi D_1, D_2, D_3 na Obr.3 slúži na premiestnenie ovládacej páčky E z danej východiskovej polohy $\overrightarrow{SB_I} \equiv E_I$ do danej konečnej polohy $\overrightarrow{SB_{II}} \equiv E_{II}$ sférickým premiestnením (Eulerove uhly: precesia ψ_{21}, nutácia θ_{32} a lokálna rotácia φ_{43}). Východisková poloha lokálnej súradnicovej sústavy $(O_2,x_2,y_2,z_2)_I$ telesa E je totožná so vzťažnou súradnicovou sústavou (O_1,x_1,y_1,z_1).

Jednoznačne daná priesečnica x_ψ rovín $x_\psi \equiv (x_1,y_1) \times (x_2,y_2)$ poskytuje uhol precesie $\psi \equiv\sphericalangle (x_1, x_\psi)$, alebo $\psi \equiv\sphericalangle (y_1, y_\psi)$, o ktorý treba pootočiť lokálnu súradnicovú sústavu E okolo osi z_1. O uhol nutácie $\theta \equiv\sphericalangle (z_1, z_2)$ ktorý vyplýva za vzájomnej polohy osí z_1, z_2 alebo $\theta \equiv\sphericalangle (y_\psi, y_\theta)$ treba pootočiť lokálnu súradnicovú sústavu E okolo osi x_ψ. Lokálna súradnicová sústava telesa E sa dostane do konečnej polohy $(O_2,x_2,y_2,z_2)_{II}$ po pootočení (lokálna rotácia) okolo osi z_2 o uhol $\varphi \equiv\sphericalangle (x_\psi,x_2)$, alebo $\varphi \equiv\sphericalangle (y_\theta,y_2)$.

Okamžitá uhlová rýchlosť $\overline{\omega}$ sférického pohybu telesa E bude vyplývať z toho za aký čas a ako (rovnomerne, nerovnomerne) sa má teleso E premiestniť z danej východiskovej do danej konečnej polohy. Okamžitá uhlová rýchlosť $\overline{\omega}$ sférického pohybu telesa E voči vzťažnému rámu bude mať súradnice vyjadrené v lokálnych sústavách ako súčet uhlových rýchlostí

$$\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k}_{I} + \dot{\theta}\,\overline{i}_{\psi} + \dot{\varphi}\overline{k}_{II}$$

Motorčeky D_1, D_2, D_3 otvoreného mechanizmu môžu uskutočniť pootočenia dané uhlami precesie ψ_{21}, nutácie θ_{32} a vlastnej rotácie φ_{43} postupne, alebo súčasne.

Teleso E sa z danej východiskovej do danej konečnej polohy dostane najrýchlejšie ak budú motorčeky D_1, D_2, D_3 pracovať súčasne. Potom stredná konštantná uhlová rýchlosť $\overline{\omega}_{41A}$ sférického pohybu telesa E bude daná súčtom stredných konštantných uhlových rýchlostí.

$$\overline{\omega}_{41A} = \overline{\dot{\psi}}_{21A} + \overline{\dot{\theta}}_{32A} + \overline{\dot{\varphi}}_{43A}$$

Na to, aby sme mohli vyjadriť okamžitú rýchlosť $\overline{v}_{A}$ koncového bodu A sprievodiča rotujúceho telesa E je potrebné pretransformovať vektor $\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k}_{I} + \dot{\theta}\,\overline{i}_{\psi} + \dot{\varphi}\overline{k}_{II}$ okamžitej uhlovej rýchlosti sférického pohybu telesa E do lokálnej súradnicovej sústavy $(O_2, x_2, y_2, z_2)_{II}$

$$\overline{\omega}_{E} = \omega_x\,\overline{i}_{II} + \omega_y\,\overline{j}_{II} + \omega_z\overline{k}_{II}$$

$$\overline{\omega}_{E} = (\dot{\psi}s\theta s\varphi + \dot{\theta}c\varphi)\,\overline{i}_{II} + (\dot{\psi}s\theta c\varphi - \dot{\theta}s\varphi)\,\overline{j}_{II} + (\dot{\psi}c\theta + \dot{\varphi})\overline{k}_{II}$$

Eulerove kinematické rovnice sú dané súradnicami $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

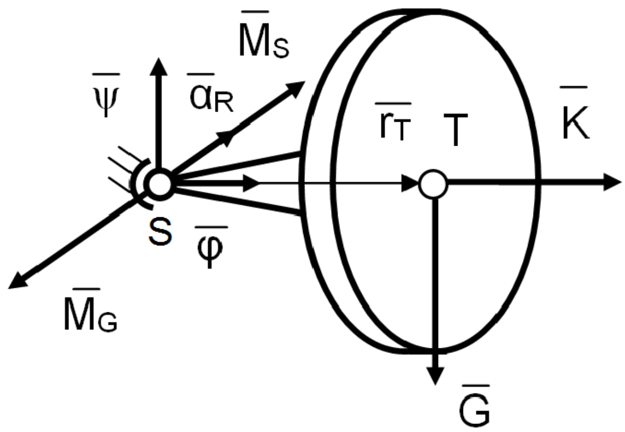
Dynamika sférického pohybu telesa

Eulerov-Poinssotov bezsilový zotrvačník:

T = S, ťažisko T je v strede S sférického pohybu telesa. $\dfrac{d\overline{K}}{dt} = \overline{0}$, teda $K = \text{konst.}$.

Lagrangeov-Poinssotov ťažký zotrvačník (Obr.4):

$T \neq S$, ťažisko T nie je v strede S sférického pohybu telesa.



Obr.4 Lagrangeov-Poinssotov ťažký zotrvačník.

$\overline{M}_S = \overline{r}_T \times \overline{G} = \dfrac{d\overline{K}}{dt}$, $\overline{M}_S = \dot{\overline{\psi}} \times \overline{K}$, $\overline{K} = I_z \dot{\overline{\varphi}}$.

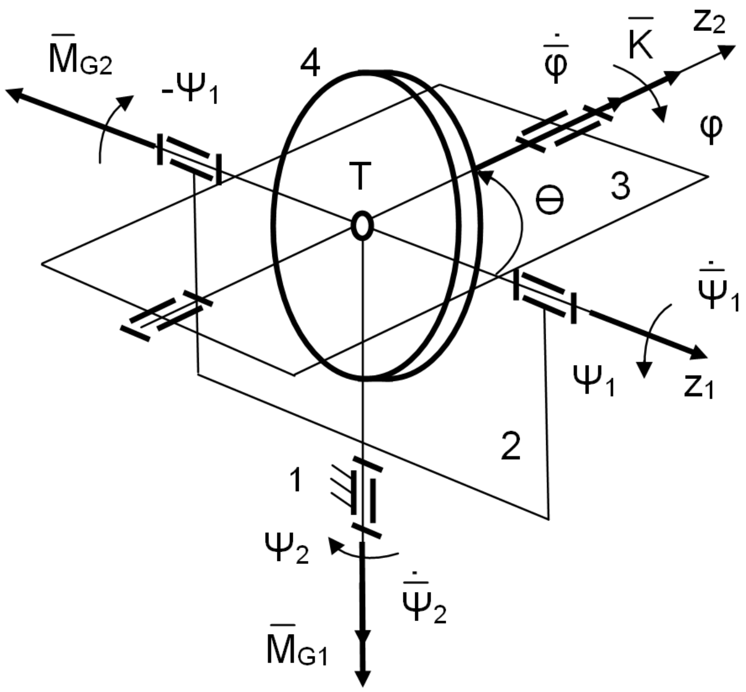
Gyroskopický moment $\overline{M}_G = -\,\dot{\overline{\psi}} \times \overline{K} = -\,\dot{\overline{\psi}} \times I_z \dot{\overline{\varphi}} = -\,I_z \overline{\alpha}_R$, kde $\overline{\alpha}_R = \dot{\overline{\psi}} \times \dot{\overline{\varphi}}$ je Résalovo uhlové zrýchlenie. Keďže $\overline{M}_G = -\dot{\overline{\psi}} \times \overline{K} = \overline{K} \times \dot{\overline{\psi}}$, potom $\overline{M}_S + \overline{M}_G = \overline{0}$.

Príklad 3

Predné koleso (teleso 4 na obr.5) bicykla má okolo osi z_2 uhlovú rýchlosť $\dot{\bar{\varphi}}$ a moment zotrvačnosti I_z potom jeho uhlová hybnosť bude $\bar{K} = I_z\dot{\bar{\varphi}}$. Pri klopení roviny kolesa okolo pozdĺžnej osi z_1 bude uhlová rýchlosť prvej precesie $\dot{\bar{\psi}}_1$. Uhol θ nutácie zvierajú osi z_1 a z_2, teda $\theta = \frac{\pi}{2} = \text{konst.}$

Úloha :

Ako vznikne prvý gyroskopický moment $\bar{M}_{G1}$? Prečo bude potom pôsobiť vyrovnávajúci gyroskopický moment $\bar{M}_{G2}$?



Obr.5 Stabilizácia predného kolesa bicykla

Riešenie

1. akcia: Pri klopení roviny kolesa okolo pozdĺžnej osi z_1 uhlovou rýchlosťou precesie $\dot{\bar{\psi}}_1$ sa bude otáčať aj vektor $\bar{K} = I_z\dot{\bar{\varphi}}$ uhlovej hybnosti.

2. akcia: Otáčanie vektora $\bar{K} = I_z\dot{\bar{\varphi}}$ uhlovej hybnosti vyvolá vznik prvého gyroskopického momentu $\bar{M}_{G1} = \bar{K} \times \dot{\bar{\psi}}_1$,

3. akcia: Prvý gyroskopický moment $\bar{M}_{G1} = \bar{K} \times \dot{\bar{\psi}}_1$ spôsobí stáčanie roviny kolesa uhlovou rýchlosťou druhej precesie $\dot{\bar{\psi}}_2$.

4. akcia: Druhá rotácia vektora $\bar{K} = I_z\dot{\bar{\varphi}}$ uhlovej hybnosti vyvolá vznik druhého gyroskopického momentu $\bar{M}_{G2} = \bar{K} \times \dot{\bar{\psi}}_2$, ktorý pôsobí proti klopeniu roviny kolesa a koleso vracia do zvislej polohy, teda ho stabilizuje.