Technická mechanika II
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

6. Cvičenie: Voľné a vynútené kmitanie jednohmotnej sústavy .
Prednáška: Voľné netlmené a tlmené kmitanie jednohmotnej sústavy. Vynútené kmitanie jednohmotnej sústavy s konštantnou a harmonickou budiacou silou aj kinematickým budením.

Voľné netlmené kmitanie jednohmotnej sústavy.

Príklad 1 — Meracie zariadenie na obr.1 bude reprezentovať teleso s hmotnosťou m = 1 kg na pružine s tuhosťou k = 25 N/m a voľnou dĺžkou L_o = 0.1 m v nedeformovanom stave.

Úloha: Vypočítajte vlastnú netlmenú uhlovú frekvenciu Ω_0 voľného kmitania danej sústavy.

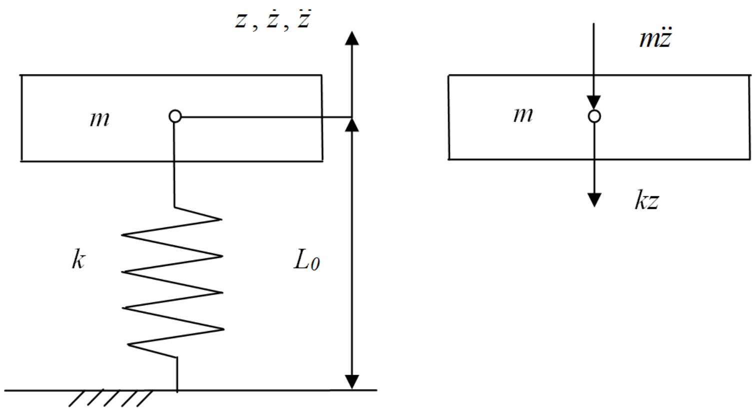
Riešenie: Dynamická diferenciálna pohybová rovnica pre voľné kmitanie mechanickej sústavy na obr.1a) s jedným vstupom (daná začiatočná výchylka z odpovedá jednému dynamickému stupňu voľnosti pohybu) je podľa obrázka obr.1b) uvoľnenej hmoty m:

$$m\ddot{z} + kz = 0 \qquad (1)$$

Vlastnú netlmenú uhlovú frekvenciu Ω_0 voľného kmitania danej sústavy určíme zo vzťahu:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} \qquad (2)$$

teda $\Omega_0 = 5\,[rad/s]$.



Obr.1 a) netlmená sústava s jedným vstupom, b) obrázok uvoľnenia

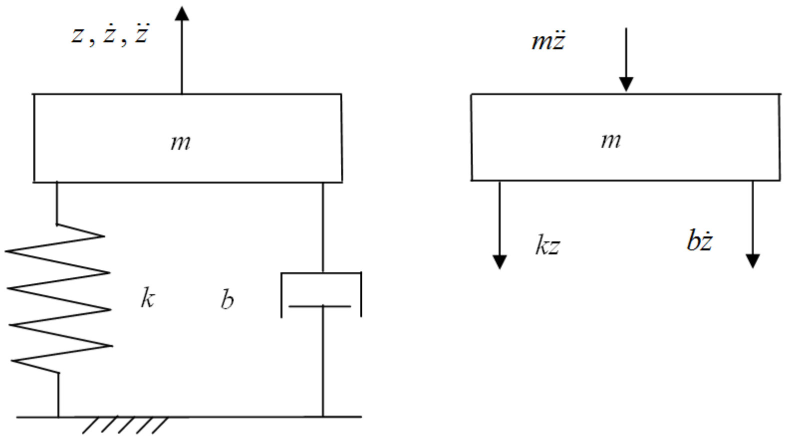
Voľné tlmené kmitanie jednohmotnej sústavy.

Príklad 2 — Meracie zariadenie na obr.2 bude reprezentovať teleso s hmotnosťou m = 1 kg viazanú k podložke pružinou s tuhosťou k = 25 N/m a voľnou dĺžkou L_o = 0.1 m v nedeformovanom stave a viskóznym tlmičom.

Úloha: Treba určiť hodnotu kritického tlmenia b_K tlmiča tak, aby sa teleso zo začiatočnej výchylky z = 0.1 m ustálilo bez prekmitnutia cez rovnovážnu polohu za najkratší čas.

Riešenie: Pohybovú rovnicu zostavíme podľa obrázka obr.2b) uvoľnenia:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0 \tag{3}$$



Obr.2 a) tlmená sústava s jedným vstupom, b) obrázok uvoľnenia

Rovnicu (3) môžeme prepísať na tvar

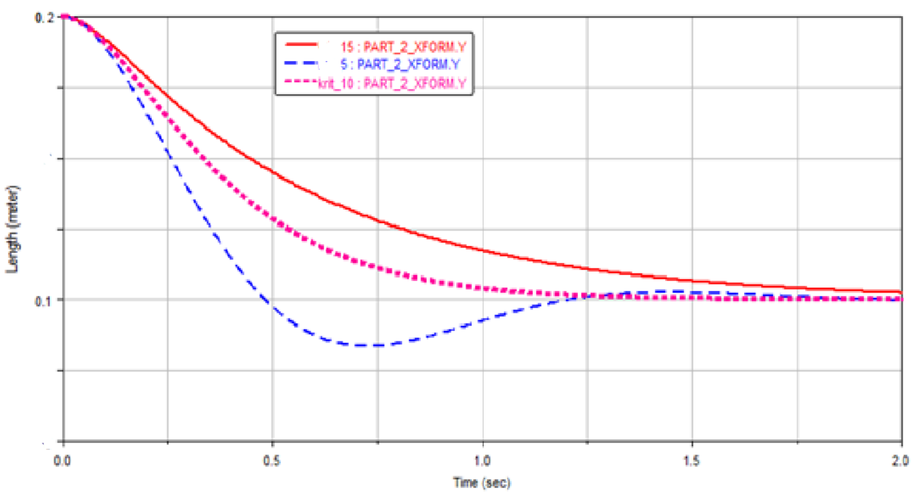
$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \Omega_0^2 z = 0 \tag{4}$$

kde $\delta = \dfrac{b}{2m}$ je konštanta útlmu. Partikulárnym riešením rovnice (4) je $z = e^{\lambda t}$. Po derivácii a dosadení partikulárneho riešenia do rovnice (4) a riešením príslušnej charakteristickej rovnice, dostaneme pre jej korene $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_n^2}$. Ak označíme $\Omega'_d = \sqrt{\delta^2 - \omega_n^2}$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \Omega'_d$ a môžu nastať tri druhy pohybov:

1.) aperiodický (pri nadkritickom tlmení) $\Omega'^2_d > 0$ teda $\delta^2 > \Omega_0^2$

2.) kmitavý (pri podkritickom tlmení) $\Omega'^2_d < 0$ teda $\delta^2 < \Omega_0^2$

3.) hraničný (kritickom tlmení b_{krit}) $\Omega'^2_d = 0$ teda $\delta^2 = \Omega_0^2$



Obr.3 Priebehy výchylky telesa m pre hodnoty tlmenia (5, 10, 15).

Hodnotu kritického tlmenia b_{krit}, pre ktoré nastane hraničný pohyb môžeme vypočítať z podmienky: $\delta^2 = \Omega_0^2$, teda $(\frac{b}{2m})^2 = \frac{k}{m}$ z čoho vyplýva, že kritické tlmenie $b_{krit} = 2\sqrt{km}$ (5)

Pre náš prípad je to $b_{krit} = 2\sqrt{25\,[\mathrm{N/m}].1\,[kg]} = 10\,[\mathrm{N\ s/m}]$.

Príklad 3

Dynamický model odpruženia športového auta Porsche Boxster je daný pohybovou rovnicou (3): $m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0$. V tejto rovnici m je hmotnosť automobilu, b a k sú hodnoty tlmenia a tuhosti ekvivalentné štyrom tlmičom a pružinám. Pre začiatočnú hmotnosť automobilu $m_1 = 1361\,kg$ bude mať statická deformácia d_1 (stlačenie) odpruženia od vlastnej tiaže hodnotu $d_1 = 0,05\,m$. Predpokladajme, že odpruženie je navrhnuté tak, aby bola sústava kriticky tlmená, teda aby sa hmota auta po výkmite od nerovností čo najrýchlejšie ustálila v rovnovážnej polohe.

1. úloha:

Pre začiatočnú hmotnosť automobilu $m_1 = 1361\,kg$ treba vypočítať tuhosť k_1 odpruženia, vlastnú netlmenú uhlovú frekvenciu Ω_0 voľného kmitania danej sústavy a hodnotu b_{k1} kritického tlmenia.

Riešenie:

Pri statickom zaťžení je tiažová sila $G_1 = m_1 g$ v rovnováhe so silou $F_1 = k_1 d_1$ v pružine. Potom $k_1 d_1 = m_1 g$ a $k_1 = \frac{m_1 g}{d_1} = 2,67.10^4\,\mathrm{N/m}$.

Vlastná netlmená uhlová frekvencia bude daná vzťahom $\Omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{d_1}} = 14\ \mathrm{rad/s}$. V prípade kritického tlmenia $\delta_1 = \Omega_{o1}$, teda $b_{k1} = 2\sqrt{m_1 k_1} = 2m_1\Omega_{01} = 2.1361.14 = 3,81.10^4\,\mathrm{kg/s}$.

2. úloha:

Ak do auta pribudne batožina hmotnosti $m_b = 290\,kg$, potom nová hmotnosť hmotnosť automobilu bude $m_2 = 1651\,kg$. Keďže odpruženie bolo navrhnuté tak, aby bola sústava kriticky tlmená len pre začiatočnú hmotnosť m_1 automobilu, treba určiť pre akú hodnotu b_{k2} tlmenia bude sústava znova kriticky tlmená.

Riešenie:

Pri zaťžení tiažovou silou $G_2 = m_2 g$ bude mať statická deformácia d_2 hodnotu $d_2 = \frac{m_2 g}{k_1} = 0,0061\mathrm{m}$, lebo tuhosť $k_1 = k_2$ pruženia sa nemení. Nová vlastná netlmená uhlová frekvencia bude daná vzťahom $\Omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{g}{d_2}} = 12,7\ \mathrm{rad/s}$. V prípade kritického tlmenia by mala byť konštanta b_{p2} pomerného útlmu $b_{p2} = \frac{\delta_2}{\Omega_{o2}} = 1$, ale vhľadom na východiskové tlmenie $b_2 = b_{k1}$, bude konštanta útlmu $\delta_2 = \frac{b_{k1}}{2m_2} = 11,538$, teda nie je splnená podmienka $\delta_2 = \Omega_{02}$

pre kritické tlmenie. Kritické tlmenie $b_2 = b_{k2}$ určíme z podmienky

$$b_{p2} = \frac{\delta_{k2}}{\Omega_{02}} = 1.$$

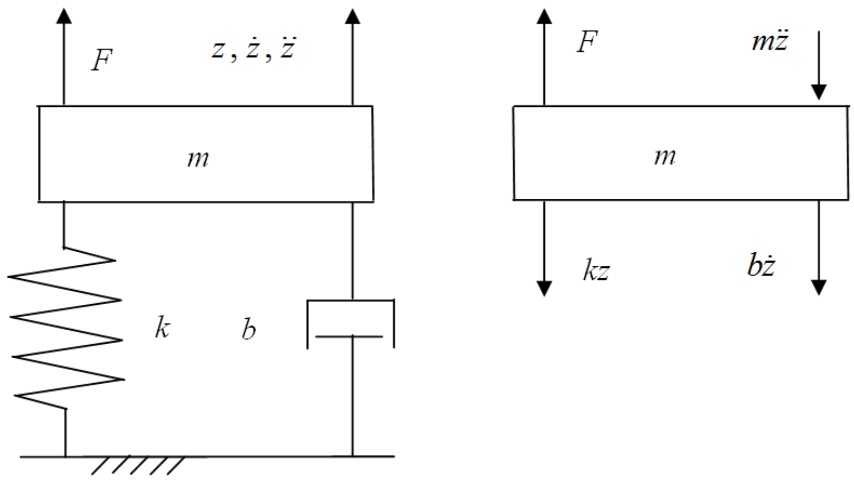
Potom $b_{k2} = 2\sqrt{m_2 k_2} = 2m_2\,\Omega_{02} = 2.1651.12,7 = 4{,}19.10^4\,\text{kg/s}$.

Vynútené kmitanie lineárnych sústav s jedným vstupom (s jedným dynamickým stupňom voľnosti pohybu)

Vynútené kmitania budiacou silou

Ak je frekvencia budiacej sily $F(t)$ zhodná s vlastnou frekvenciou sústavy, nastane rezonancia a výchylky kmitania hmoty m narastajú, čo v reálnom prípade súvisí so zväčšovaním deformácií a možnosti poškodenia.
Pri vynútenom kmitaní pohyb hmoty m vzniká tým, že buď na sústavu pôsobí vonkajšia budiaca sila $F(t)$. Pohybová rovnica vyplýva z podmienky dynamickej rovnováhy

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F(t) \tag{6}$$



Obr. 4 a) Mechanický model vynúteného kmitania (budenie vonkajšou silou) sústavy s jedným vstupom (s jedným dynamickým stupňom voľnosti pohybu), b) obrázok uvoľnenia

Kinematické budenie

Pohybová rovnica odpruženej hmoty m karosérie automobilu, ktorá kmitá prostredníctvom neodpružených hmôt (koleso, náprava a tlmič s pružinou) kinematicky budených nerovným povrchom cesty na obr.5 a) bude podľa obrázka uvoľnenia obr.5 b) :

$$m\ddot{z} + b\dot{y} + ky = 0, \tag{7}$$

Lokálna súradnica (výchylka y) relatívnej polohy hmoty m voči základu je daná rozdielom $y = z - x$ a po substitúcii $\dot{y} = \dot{z} - \dot{x}$, $\ddot{y} = \ddot{z} - \ddot{x}$ dostaneme

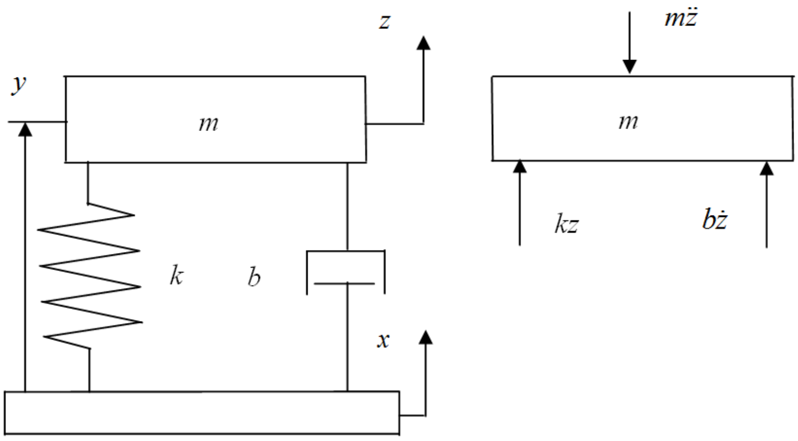
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -m\ddot{x}, \tag{8}$$

Pre globálne súradnice (výchylky x, z) dostaneme

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = b\dot{x} + kx \tag{9}$$

Ak predpokladáme, že $z = x_a e^{j\omega t}$, kde x_a je amplitúda budenia od cesty, potom bude

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = \left(j\omega b + k\right)\, x_a e^{j\omega t} \tag{10}$$



Obr.5 a) Model kmitania sústavy budenej pohybom základu, b) obrázok uvoľnenia

Ak porovnáme rovnicu (10) s rovnicou: $m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=F_a e^{j(\omega_b t+\phi)}$ pre harmonické budenie, vidíme, že obidve rovnice budú rovnaké, ak položíme $F_a = x_a\left(j\omega_b b+k\right)$ a $\varphi = 0$.

$$\frac{|z|}{x_a}=\sqrt{\frac{1+\left(2\eta b_p\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(2\eta b_p\right)^2}} \tag{11}$$

Kde pomer $\eta=\dfrac{\omega_b}{\Omega_0}$ budiacej ω_b a vlastnej Ω_0 frekvencie je súčiniteľ naladenia sústavy. Vzťah (11) vyjadruje pomer maximálnej amplitúdy odozvy k amplitúde vstupu, resp. opisuje ako sa transformuje budiaci pohyb základu na pohyb odpruženej hmoty m v závislosti od súčiniteľa η naladenia sústavy.

Príklad 4

V prípade kinematicky budeného pohybu automobilu od nerovnej cesty treba vyšetriť vplyv rýchlosti a hmotnosti automobilu na amplitúdu kmitania. Ekvivalentné hodnoty tuhosti a tlmenia odpruženia automobilu sú $k=4.10^5\,\text{N/m}$, $b=2.10^4\,\text{N s/m}$, a východisková hmotnosť $m=m_1=1007$ kg.

Riešenie 1

Matematický model cesty je daný vzťahom $y(t)=0{,}01\sin\omega_b t$, teda výkmit je $A=0{,}002$ m a perióda $T=6$ m. Amplitúda budenia od cesty $x_a=0.1$ m a frekvencia budenia od cesty je $f_b=v/\lambda$, kde v je rýchlosť automobilu v km/h a λ je vlnová dĺžka nerovnosti v km. Platí, že frekvencia $f=\omega/2\pi$ a po dosadení je frekvencia budenia od cesty

$$\omega_b=2\pi v/\lambda=2\pi v/(3600.0{,}006)=0{,}291\,\text{rad/s} \tag{12}$$

Zo vzťahu pre výpočet ω_b vyplýva, že frekvencia ω_b budenia od cesty závisí lineárne od rýchlosti automobilu. Potom aj naladenie η závisí lineárne od rýchlosti a na určenie vplyvu rýchlosti na amplitúdu kmitania môžeme použiť vzťah (11). Pre rýchlosť automobilu $v=20\,km/h$ frekvencia budenia od cesty má hodnotu $\omega_b=5{,}818$ rad/s. Vlastná uhlová frekvencia automobilu je

$\Omega_0 = \sqrt{\frac{4.10^5}{1007}} = 19,93\,\text{rad/s}$, a teda naladenie bude $\eta = 5{,}818/19{,}93 = 0{,}292$. Pomerné tlmenie má potom hodnotu, $b_p = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{20\ 000}{2\sqrt{4.10^5.1007}} = 0{,}498$. Dosadením do (11) hodnota výchylky automobilu bude

$$z = x_a\sqrt{\frac{1+\left(2\eta b_p\right)^2}{\left(1-\eta^2\right)^2+\left(2\eta b_p\right)^2}} = 0,01\sqrt{\frac{1+(2.0,292.0,498)^2}{(1-0,292^2)^2+(2.0,292.0,498)^2}} = 0,0108m$$

Porovnaním výsledku pre výchylku z automobilu so vstupnou amplitúdou A budenia od cesty vidno, že odpruženie zvyšuje 1,1 krát vstupnú amplitúdu A nerovnosti cesty.

Riešenie 2

V prípade ak pôvodné auto vezie náklad $m_b = 578\,kg$, potom sa pre ťažší automobil s hmotnosťou $m_2 = 1585\,kg$ hodnoty naladenie aj hodnota amplitúdy zmenia: $\eta = 0{,}36$, $x_{a2} = 0,0114\,m$.

Riešenie 3

Pre vyššiu rýchlosť $v = 80\,km/h$ má ľahšie auto budiacu frekvenciu $\omega_b = 23{,}271$, naladenie $\eta = 1{,}17$ a hodnotu amplitúdy $x_{a3} = 0,0126\,m$. Pre ťažšie auto dostaneme hodnoty: $\eta = 1{,}46$, $x_{a4} = 0,0094\,m$. Hoci obidva automobily, ľahké aj ťažké, mali to isté odpruženie, každý potrebuje iný návrh parametrov vhodného pasívneho odpruženia. Pri väčších rýchlostiach ťažšie auto vykazuje menšiu amplitúdu kmitania.

Ako hodnotíme a zvyšujeme jazdné pohodlie a jazdnú istotu dopravných prostriedkov

Jazdné pohodlie

Pruženie automobilu má za úlohu tlmiť nárazy, ktoré vznikajú pri jazde po nerovnostiach a filtrovať prenos kmitania do karosérie automobilu a do vnútorných orgánov posádky (hľadisko jazdného pohodlia).

Jazdná istota

Druhou požiadavkou na vlastnosti pruženia je zabezpečiť aby boli kolesá vozidla v neustálom kontakte s vozovkou aby mohli prenášať hnacie, brzdné a bočné sily, a tým dosiahnuť stabilitu a ovládateľnosť vozidla (hľadisko jazdnej bezpečnosti).

Pasívne tlmenie

Pasívne tlmenie sa obyčajne skladá zo vzduchového alebo kvapalinového tlmiča a pružiny. Toto tlmenie sa volí buď mäkké - zlepšuje jazdné pohodlie posádky, no zhoršuje jazdné vlastnosti alebo tvrdé, ktoré zlepšuje jazdnú bezpečnosť na úkor jazdného pohodlia.

Poloaktívne tlmenie

Poloaktívne tlmenie využíva riadený ventil na dosiahnutie zmeny konštanty tlmiča, ktorým sa počas jazdy mení charakteristika tlmenia.

Aktívne tlmenie

Aktívne tlmenie zvyšuje ovládateľnosť automobilu a jazdné pohodlie cestujúcich. Ako akčný člen slúži riadený zdroj sily.