

Technická mechanika II

210 322 BEK, 210 202 BDS

pre bakalárov, zimný sem.

doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

5. Cvičenie: Dynamika translačného a rotačného pohybu telesa.

Prednáška: Kinematika a dynamika translačného a rotačného pohybu telesa.

Príklad

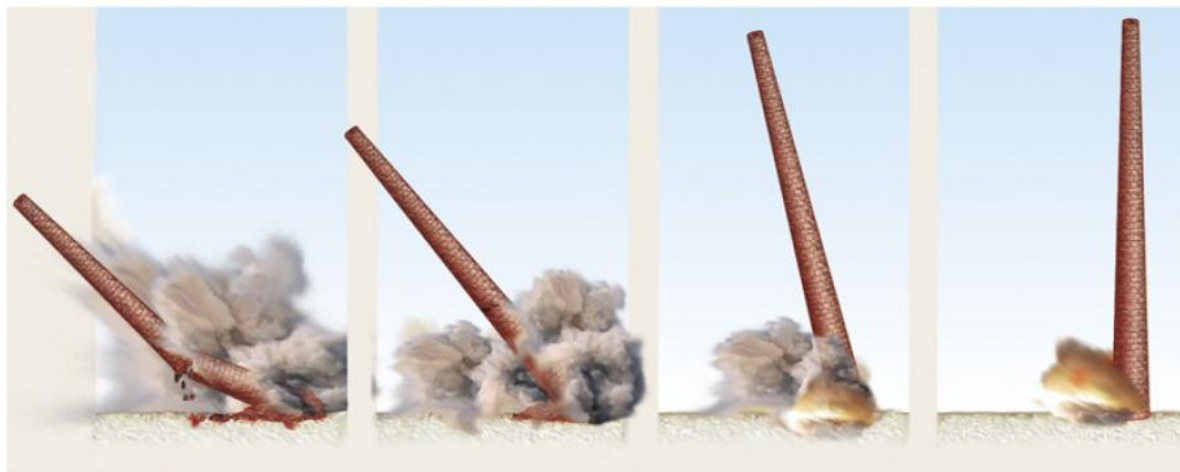
Továrenský komín pri demolácii po odstrele v ľavej časti základu stratí stabilitu a padá tak, že rotuje okolo základu (obr.1). Počas pádu na neho pôsobí stále väčší ohybový moment, preto sa ešte pred dopadom na zem rozlomí.

Úloha

Treba určiť priebeh ohybového momentu a miesto kde bude pôsobiť jeho maximum.

Riešenie

Továrenský komín bude reprezentovať štíhla tyč dĺžky L a hmotnosti m , ktorá začne rotovať okolo bodu A z východiskovej zvislej polohy.



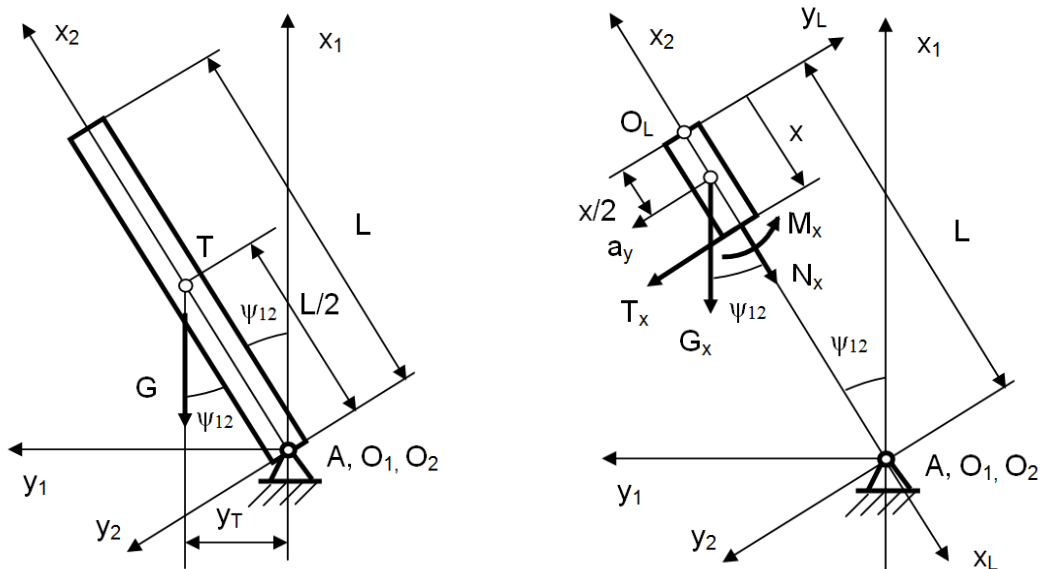
Obr.1 Pád továrenského komína pri demolácii po odstrele v ľavej časti základu.

Rotačný pohyb tyče

Rotáciu tyče (obr.2a) okolo osi prechádzajúcej bodom A uhlovým zrýchlením α spôsobuje viazaný moment M_A viazanej dvojice síl (tiažová sila $G = mg$ a reakčná sila v bode A rotačnej geometrickej väzby) s ramenom $y_T = (L/2) \sin \psi_{12}$, kde uhol $\psi_{12} = \sphericalangle(x_1, x_2)$ je uhlová súradnica polohy tyče voči osi x_1 . Dynamická rovnica pre rotačný pohyb telesa je potom

$$M_A = I_{zA} \alpha \quad (1)$$

kde I_{zA} je moment zotrvačnosti tyče voči osi z prechádzajúcej bodom A a α je veľkosť uhlového zrýchlenia $\alpha = \frac{d^2 \psi_{12}}{dt^2}$.



Obr.2 a) tyč rotujúca okolo A

b) úsek tyče dĺžky x

Steinerova veta

Moment zotrvačnosti I_{zA} tyče voči osi z prechádzajúcej bodom A bude podľa Steinerovej vety

$$I_{zA} = I_{zT} + m(L/2)^2 \quad (2)$$

kde $I_{zT} = (1/12) m L^2$ je hmotný moment zotrvačnosti tyče voči osi z prechádzajúcej ťažiskom T. Po dosadení je

$$I_{zA} = (1/3) m L^2 \quad (3)$$

Uhlové zrýchlenie

Po dosadení do rovnice (1) je $mg(L/2) \sin \psi_{12} = (1/3) mL^2 \alpha$, z čoho získame priebeh uhlového zrýchlenia α v závislosti od uhla ψ_{12}

$$\text{pootočenia tyče } \alpha = \frac{3g}{2L} \sin \psi_{12} \quad (4)$$

Vnútorne účinky

V mieste myšlieného rezu tyče (Obr.2b), na konci úseku vo vzdialenosti x od začiatku O_L vzťažnej súradnicovej sústavy $O_L = (x_L, y_L)$, pôsobí priečna sila T_x , osová sila N_x a ohybový moment M_x . Hmotnosť m_x úseku tyče dĺžky x je

$$m_x = \frac{mx}{L} \quad (5)$$

Podmienky rovnováhy

Prvú rovnicu rovnováhy získame sčítaním priemetov síl pôsobiacich na úsek dĺžky x do smeru osi y_L

$$T_x + mg(x/L) \sin \psi_{12} = ma_y \quad (6)$$

kde a_y je tangenciálne zrýchlenie ťažiska úseku dĺžky x .

Druhú rovnicu rovnováhy získame sčítaním momentov pôsobiacich v mieste myšlieného rezu

$$M_x - (x/2) T_x = I_{z(x)} \alpha$$

Po dosadení $I_{z(x)} = (1/12) m (x/L) x^2$ za moment zotrvačnosti úseku tyče dĺžky x voči osi z prechádzajúcej miestom myšlieného rezu za $\alpha = \frac{3g}{2L} \sin \psi_{12}$ dostaneme

$$M_x - (x/2) T_x = (1/12) m (x/L) x^2 (3/2)(g/L) \sin \psi_{12} \quad (7)$$

Priebeh momentu

Po vylúčení priečnej sily T_x z rovníc rovnováhy (6), (7) dostaneme vzťah pre priebeh ohybového momentu M_x v závislosti od uhla ψ_{12} pootočenia tyče:

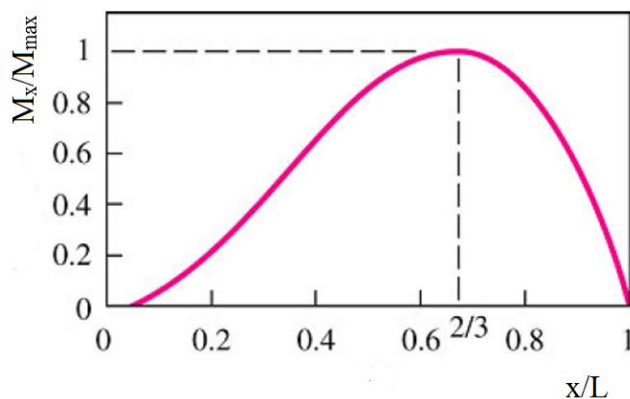
$$M_x = (1/12) m (x/L) x^2 (3/2)(g/L) \sin \psi_{12} + (x/2) m (x/L)(g \sin \psi_{12} + a_y) \quad (8)$$

Aby sme dostali priebeh ohybového momentu M_x v závislosti od zmeny súradnice x pozdĺž tyče, tak tangenciálne zrýchlenie a_y vyjadríme podľa vzťahu $a_t = \alpha r$, teda $a_y = (L - x/2) \alpha$, a za uhlové zrýchlenie α dosadíme zo vzťahu (4) $\alpha = \frac{3g}{2L} \sin \psi_{12}$. Potom bude

mať ohybový moment M_x priebeh

$$M_x = (1/4) m g L (\sin \psi_{12}) (x/L)^2 (1 - x/L) \quad (9)$$

ktorý má maximálnu hodnotu $M_{\max} = (1/27) mgL \sin \psi_{12}$ v mieste $x = (2/3) L$, ako to vidno na obr.3, kde je priebeh pomeru M_x/M_{\max} v závislosti od x/L .



Obr.3 Priebeh pomeru M_x/M_{\max} v závislosti na pomere (x/L) .