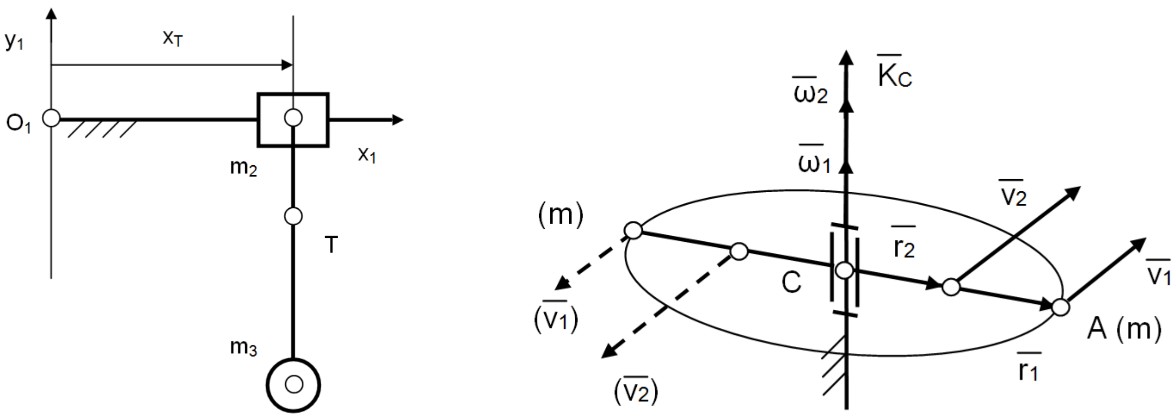
Technická mechanika II
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

4. Cvičenie: Dynamika sústavy hmotných bodov (SHB).
Prednáška: Viazaný pohyb bodu telesa. Dynamika relatívneho pohybu. Hybnosť, moment hybnosti a kinetická energia sústavy hmotných bodov.

Sústava hmotných bodov (SHB) môže byť:

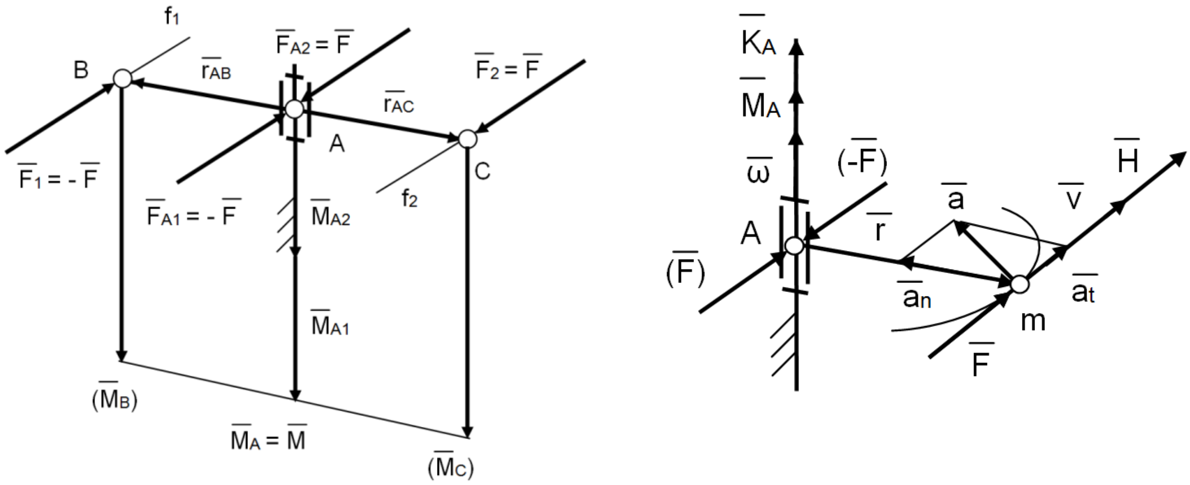
a) voľná (napríklad Zem a Mesiac bez geometrickej väzby),

b) viazaná (napríklad viazaná sústava hmotných bodov mačky m_2 žeriava a bremena m_3 viazaná geometrickou väzbou-nehmotným otočným ramenom) na Obr.1 a).



Obr.1 a) viazaná sústava hmotných bodov b) zmena $\bar{r}_1$ na $\bar{r}_2$ vplyvom vnútorných síl

Vonkajšie sily	Vonkajšie sily $\bar{F}_{E\,i}$ pôsobiace na sústavu hmotných bodov (SHB) vyvolávajú telesá, ktoré do SHM nepatria. Napríklad Zem pôsobí gravitačnými vonkajšími silami na SHB z Obr.1a).
Vnútorné sily	Vnútorné sily $\bar{F}_{Ii}$ pôsobia len medzi telesami SHB. Napríklad krasokorčuliar na Obr. 4 rotujúci konštantnou uhlovou rýchlosťou $\bar{\omega}_1$ aktívne zmení vnútornou silou východiskovú polohu ($\bar{r}_1$) rúk na menšiu vzdialenosť ($\bar{r}_1$).
Konzervatívna sústava	$\sum \bar{F}_{E\,i} = \bar{0}$
Nekonzervatívna sústava	$\sum \bar{F}_{E\,i} \neq \bar{0}$
Voľný moment	Voľná dvojica akčných síl ($\bar{F}$, -$\bar{F}$) s rovnobežnými nositeľkami s kolmou vzialenosťou r pôsobí na voľné, alebo viazané tuhé teleso voľným momentom $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$, ktorý má len otáčavý účinok.



Obr.2 a) voľný moment $\overline{M}$ voľnej dvojice síl, b) viazaný moment $\overline{M}_A$ viazanej dvojice síl

Viazaný moment

Akčná sila $\overline{F}^A = \overline{F}$ pôsobiaca v hmotnom bode m na nehmotnom ramene rotačne viazanom v bode A má posuvný účinok, ktorý vyvolá v rotačnej geometrickej väzbe v bode A reakčnú silu $-\overline{F}^R = -\overline{F}$. Viazaný moment $\overline{M}_A = \overline{r} \times \overline{F}$ viazanej dvojice síl ($\overline{F}$, $-\overline{F}$) má na rameno s hmotným bodom m otáčavý účinok.

Pôsobenie impulzu sily na zmenu dráhovej hybnosti sústavy hmotných bodov

Pohybová rovnica

Nech na každý hmotný bod m_i vo viazanej sústave hmotných bodov pôsobia vnútorné sily $\overline{F}_{I\,i}$ a výslednica $\overline{F}_{E\,i}$ vonkajších síl (vplyv gravitačných alebo kontaktných síl).

$$\sum \overline{F}_{E\,i} + \sum \overline{F}_{I\,i} = \sum m_i \overline{a}_i$$

výslednica $\sum \overline{F}_{I\,i}$ vnútorných síl bude nulová, lebo sú rovnako veľké a opačne orientované. Výslednica $\overline{F}_{E\,i}$ vonkajších síl je potom

$$\sum \overline{F}_{E\,i} = \sum m_i \overline{a}_i$$

Ak $\overline{r}_T$ je polohový vektor ťažiska T , potom

$$\sum \overline{F}_{E\,i} = m \overline{a}_T$$

Veta o pohybe ťažiska T sústavy hmotných bodov

"Ťažisko T sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená hmotnosť celej sústavy a pôsobila naň výslednica všetkých vonkajších síl.". Teda ak sa výsledná sila pôsobiaca na sústavu rovná nule, ťažisko T sústavy hmotných bodov zotrváva v pokoji , alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb.

Po integrácii pohybovej rovnice

$$\sum \bar{F}_{E\,i} = \sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}$$

Pre časy t_1, t_2 dostaneme

$$\sum m_i(\bar{v}_i)_1 + \sum \int_{t1}^{t2} \bar{F}_{E\,i} dt = \sum m_i(\bar{v}_i)_2$$

Východisková dráhová hybnosť sústavy v čase t_1 sa vplyvom impulzu vonkajších síl od času t_1 po t_2 zmení.

$$\int_{t1}^{t2} \bar{F}_E \, dt = \Delta \bar{H}_C$$

Prvá pohybová rovnica pre sústavu hmotných bodov

Výslednica vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov vyvolá časovú zmenu dráhovej hybnosti sústavy, teda je rovná **derivácii dráhovej hybnosti sústavy .**

$$\bar{F} = \frac{d\bar{H}}{dt}$$

Ak je impulz vonkajších síl nulový, tak sa dráhová hybnosť sústavy od času t_1 po t_2 nezmení.

$$\sum m_i(\bar{v}_i)_1 = \sum m_i(\bar{v}_i)_2$$

Celková dráhová hybnosť izolovanej (konzervatívnej) sústavy hmotných bodov sa pri zmene vzájomnej polohy hmotných bodov nezmení.

Druhá pohybová rovnica pre sústavu hmotných bodov

Sústava hmotných bodov vo všeobecnom prípade môže konať i rotačný pohyb. Pri skúmaní rotačného pohybu, obdobne ako pri hmotnom bode, uvažujeme viazaný moment viazanej dvojice síl a viazaný moment hybnosti (uhlová hybnosť) sústavy hmotných bodov.

Výsledný viazaný moment vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov vyvolá časovú zmenu uhlovej hybnosti sústavy (viazaného momentu hybnosti), teda je rovná **derivácii uhlovej hybnosti sústavy .**

$$\bar{M}_C = \frac{d\bar{K}_C}{dt}$$

$$\int_{t1}^{t2} \bar{M}_{CE} \, dt = \Delta \bar{K}_C$$

"**Impulz momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov sa vyvolá zmenu uhlovej hybnosti (viazaného momentu hybnosti) sústavy**".

Podmienky rovnováhy sústavy hmotných bodov

Dráhová hybnosť sústavy sa nemení, ak výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na sústavu sa rovná nule. Prvou podmienkou rovnováhy sústavy hmotných bodov (telesa) je $\bar{F} = \bar{0}$ čo platí pre **izolovanú** (konzervatívnu) sústavu hmotných bodov, t.j. sústavu na ktorú nepôsobia vonkajšie sily.

Viazaný moment hybnosti sústavy hmotných bodov (telesa) sa nemení, ak výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sa rovná nule.

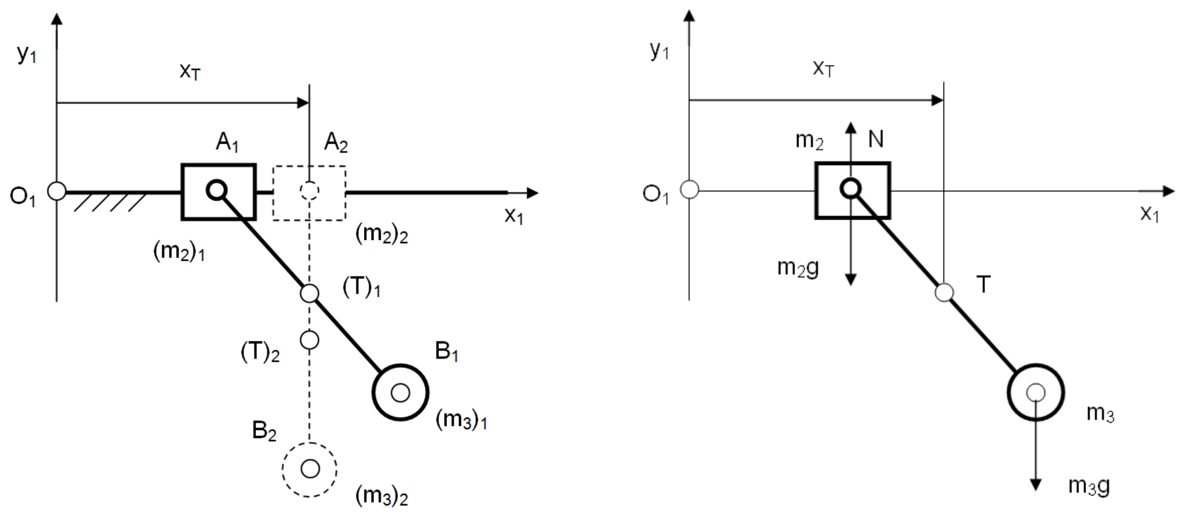
Druhou podmienkou rovnováhy sústavy hmotných bodov (telesa) je teda $\bar{M} = \bar{0}$.

Príklad 1

Mačka m_2 žeriavu sa posúva pozdĺž osi x_1 a nehmotné rameno A_1 , B_1 s bremenom m_3 sa môže otáčať v rotačnej geometrickej väzbe v bode A_1. Daná viazaná sústava hmotných bodov m_2, m_3 má spoločné ťažisko T vo vzdialenosti x_T.

Úloha

Treba dokázať, že vzdialenosť x_T ťažiska T sa po premiestnení hmotných bodov, m_2, m_3 nezmení.



Obr.3 a) viazaná sústava m_2, m_3 hmotných bodov, b) obrázok uvoľnenia

Riešenie

Na danú viazanú sústavu hmotných bodov m_2, m_3 so spoločným ťažiskom T vo vzdialenosti x_T pôsobia vo východiskovej polohe prvotné tiažové sily. m_2g , m_3g a druhotná normálová reakčná sila N v posuvnej geometrickej väzbe.

Podľa obrázka uvoľnenia napíšeme vektorovú pohybovú rovnicu:

$$\sum \bar{F}_{E\,i} + \sum \bar{F}_{I\,i} = \sum m_i \bar{a}_i\,, \qquad (m_2 + m_3)\ \bar{a}_T = m_2 \bar{g} + m_3 \bar{g} + \bar{N}$$

Po priemete do smeru osi x_1 dostaneme

$$(m_2 + m_3)\ a_{Tx} = 0\,,\ a_{Tx} = 0\,,\ \ v_{Tx} = 0\,,\ x_T = const$$

Z rovnice $x_T = const$ vyplýva, že po zmene vzájomnej polohy hmotných bodov sa ťažisko T premiestňuje z východiskovej polohy T_1 do konečnej polohy T_2 len v smere osi y_1, teda vzdialenosť x_T ťažiska T sa po premiestnení hmotných bodov, m_2, m_3 nezmení.

Príklad2

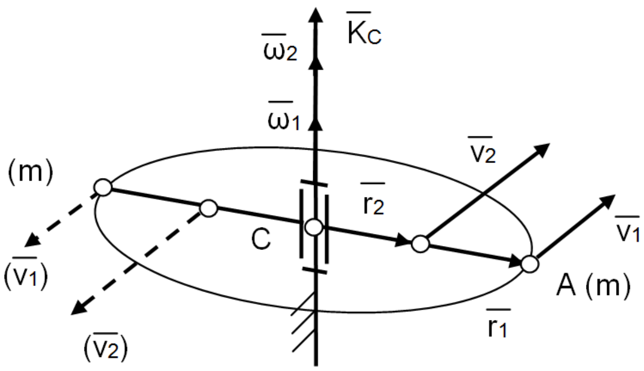
Krasokorčuliar rotujúci konštantnou uhlovou rýchlosťou $\bar{\omega}_1$ aktívne zmení východiskovú polohu ($\bar{r}_1 = \overrightarrow{CA}$) rúk na menšiu vzdialenosť ($\bar{r}_2$).

Úloha

Treba určiť $\bar{\omega}_2$ po zmene východiskovej polohy ($\bar{r}_1$) rúk na menšiu vzdialenosť ($\bar{r}_2$).

a) z definície viazaného momentu hybnosti (uhlovej hybnosti)

b) pomocou momentov zotrvačnosti.



Obr.4 zmena $\bar{r}_1$ na $\bar{r}_2$ vplyvom vnútorných síl

Riešenie

a) viazaný moment $\bar{K}_C$ dráhovej hybnosti $\bar{H} = m\bar{v}$ je $\bar{K}_C = \bar{r} \times \bar{H}$ (rotačná hybnosť $\bar{K}_C$).

$\bar{K}_C = \bar{r}_1 \times m\bar{v}_1$, aj

$\bar{K}_C = \bar{r}_2 \times m\bar{v}_2$, algebricky

$r_1 m v_1 = r_2\ m v_2$

a vzhľadom na vzťah $v = \omega\, r$, dostaneme

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1,$$

teda $\omega_2 > \omega_1$.

b) moment zotrvačnosti I_z hmotného bodu m k osi rotácie je $I_z = mr^2$ a

$K_C = I_{z1}\omega_1$,

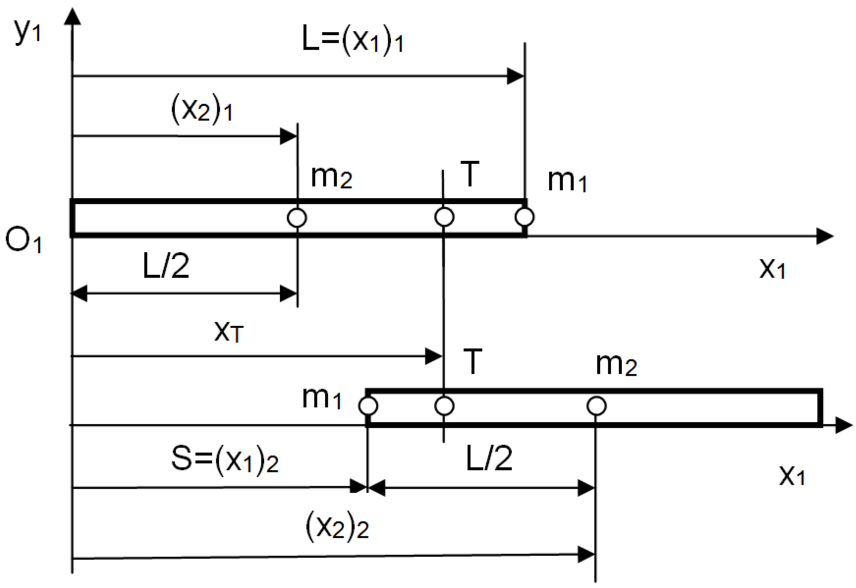
aj $K_C = I_{z2}\,\omega_2$,

potom $r_1mv_1 = r_2\,mv_2\,r_2^2\,\omega_2 = r_1^2\,\omega_1$,

teda $\omega_2 > \omega_1$.

Príklad 3

Plavčík s hmotnosťou $m_1 = 80$ kg , stojí na jednom konci loďky hmotnosti $m_2 = 20$ kg a dĺžky L= 4 m vo vzdialenosti, $(x_1)_1$.



Obr. Východisková a konečná poloha plavčíka m_1 a loďky m_2 .

Úloha1

Vypočítajte dĺžku S o koľko sa posunie teleso loďky vzhľadom na breh, ak plavčík prejde z miesta $(x_1)_1$ na druhý koniec loďky $(x_1)_2$.

Riešenie1

V konzervatívnej sústave hmotných bodov m_1, m_2, na ktoré pôsobí len vnútorná sila plavčíka bude platiť zákon zachovania dráhovej hybnosti

$$\bar{H} = m\,\bar{v}_T = \bar{0},$$

kde $v_T = \dot{x}_T$.

$x_T m = x_1 m_1 + x_2 m_2$, z toho :

$$x_T = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m},$$

Vo východiskovej polohe

$$x_T = \frac{4.80 + 2.20}{100} = 3,6\text{m}$$

V konečnej polohe

$$x_T = \frac{S.80 + (S+2).20}{100}$$

Z toho S = 3,2m

Úloha 2

Aké budú rýchlosti plavčíka $\bar{v}_1$ a loďky $\bar{v}_2$?

Riešenie2

Pre pohyb ťažiska potom platí $\dot{x}_T = \text{konšt.}$,

$$m\bar{v}_T = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2,$$

kde $m\bar{v}_T = 0$,

potom $\bar{v}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1}\bar{v}_2$.

Loďka sa teda pohybuje opačne orientovanou rýchlosťou ako kráča plavčík.