Technická mechanika II

210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

3. **Cvičenie: Dynamika bodu telesa.** Historický význam dynamiky pre prax. Kinematika ako východisko pre riešenie úloh v dynamike. Newtonove zákony. Pohybové rovnice voľného hmotného bodu. Hybnosť, impulz sily, moment hybnosti, kinetická energia, práca, výkon.

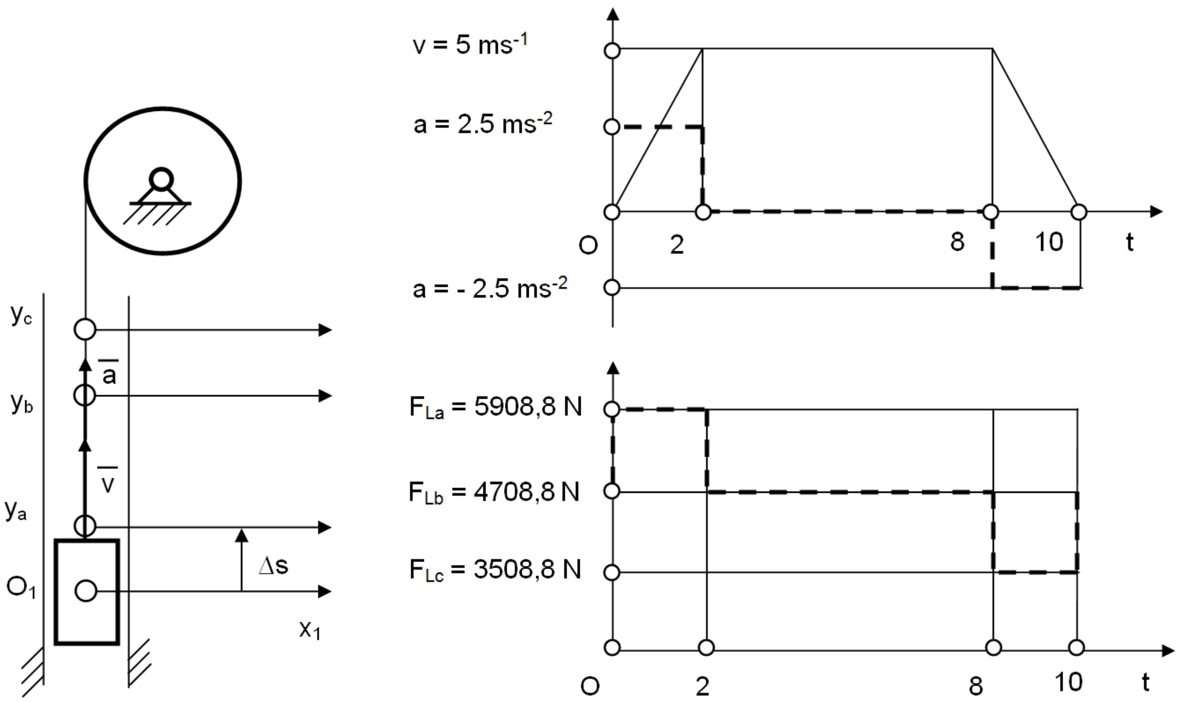
Dynamika hmotného bodu pri priamočiarom pohybe

Príklad č.1 Uvažujme kabínu výťahu ako hmotný bod, ktorý má hmotnosť $m = 480$ kg a z pokoja sa bude pohybovať predpísaným časovým priebehom rýchlosti (Obr. 1 a, b, c), kde $t_a = 2s$, $t_b = 8s$, $t_c = 10s$.

Úlohy:

1. Akú výšku dosiahne kabína výťahu
   - po rozbehu za čas $t_a = 2s$, (y_a),
   - po ustálenom pohybe za čas $t_b = 6s$, (y_b),
   - po brzdení za čas $t_c = 2s$, (y_c).

2. Pre bezpečnú prevádzku výťahu treba určiť aká maximálna sila bude pôsobiť na lano počas celého režimu.



Obr.1 a) polohy kabíny výťahu, b) priebeh rýchlosti, zrýchlenia a spomalenia kabíny výťahu, c) priebeh sily v lane.

Riešenie 1 (kin.)

1. úsek (rozbeh).

Začiatočné podmienky sú $t_0 = 0, v_0 = 0, s_0 = 0$. Za čas $t_a = 2\text{s}$ bude mať kabína rýchlosť $v_a = 5\ \text{ms}^{-1}$, zrýchlenie $a_a = \frac{v_a}{t_a}$, $a_a = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$ bude konštantné. Prebehnutú dráhu určíme zo vzťahu $s = \frac{1}{2}at^2$, $y_a = 5\text{m}$.

2. úsek (rovnomerný pohyb). Rýchlosť $v_b = 5\ \text{ms}^{-1}$, $a_b = 0\ \text{ms}^{-2}$. Prebehnutú dráhu určíme zo vzťahu $s = v\,t$, $y_b = 35\ \text{m}$.

3. úsek (brzdenie). Spomalenie $a_c = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$ bude konštantné. Prebehnutú dráhu určíme zo vzťahu $s = \frac{1}{2}at^2$, $y_c = 40\ \text{m}$.

Riešenie 2 (dyn.)

1. úsek (rozbeh).

V čase $t_0 = 0$ bude sila $\bar{F}_{L0}$ v lane v rovnováhe s tiažovou silou G. Na to aby sa kabína pohybovala nahor konštantným zrýchlenim $a_a = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$ musí sila $\bar{F}_{La}$ v lane prekonať tiažovú silu G a zotrvačnú d´Alambertovu silu $\bar{F}_D = -m\bar{a}_a$. Pre režim rozbehu teda budú po uvoľnení (odstránení väzieb) na hmotný bod m pôsobiť akčné sily (tiažová sila G a hnacia sila $\bar{F}_a = \bar{F}_{La}$) a reakčná zotrvačná d´Alambertova sila. $\bar{F}_{La} = F_a = 5\,908{,}8\ \text{N}$.

2. úsek (rovnomerný pohyb kabíny).

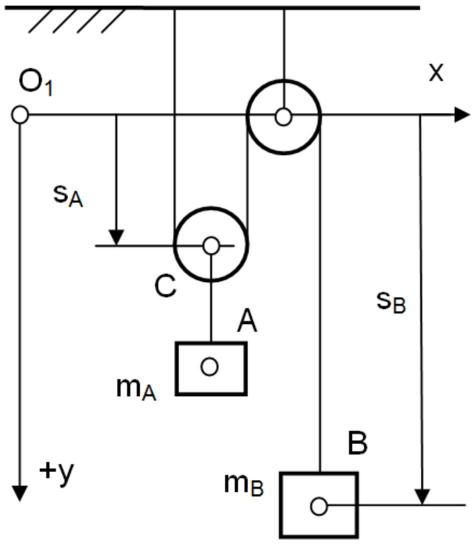
Sila $\bar{F}_{Lb}$ v lane bude v rovnováhe s tiažovou silou G. Po uvoľnení bude na hmotný bod m pôsobiť akčná tiažová sila G a akčná rovnovážna sila F_b), teda sila $\bar{F}_{La}$ v lane z prvého úseku poklesne o veľkosť zotrvačnej d´Alambertovej sily $\bar{F}_D$ z prvého úseku. $\bar{F}_{Lb} = F_b = 4\,908{,}8\ \text{N}$.

3. úsek (brzdenie).

Na to aby sa kabína, ktorá má na začiatku brzdenia rýchlosť $v_b = 5\ \text{ms}^{-1}$ zastavila, je potrebné spomalenie $a_c = 2{,}5\ \text{ms}^{-2}$. Po uvoľnení budú na hmotný bod m pôsobiť akčné sily (tiažová sila G a sila $\bar{F}_{Lc}$ v lane) a reakčná zotrvačná d´Alambertova sila $\bar{F}_D = -m\bar{a}_c$. Potom $\bar{F}_{Lc} = 3508{,}8\ \text{N}$. Akonáhle sa kabína zastaví, sila $\bar{F}_{L10}$ v lane musí byť zasa v rovnováhe s tiažovou silou G.

Príklad č.2

Bremeno $m_A = 100$ kg na obr. 2 začne pôsobiť z pokoja. Ak zanedbáme hmotnosť kladiek a lana treba určiť rýchlosť bremena $m_B = 20$ kg, v čase $t = 2s$, a) z dynamických pohybových rovníc, b) z rovnice pre impulz sily a dráhových hybností.



Obr. 2 Kladkostroj.

Riešenie

a) Dynamické pohybové rovnice zostavíme pre hmotné body m_A, m_B, pričom využijeme kinematickú väzobnú podmienku $2s_A + s_B = L$, že súčet súradníc polohy, o ktorých predpokladáme, že sú súhlasne orientované, je rovný konštantnej dĺžke L lana. Po derivácii tejto podmienky dostaneme, že v skutočnosti majú opačné znamienka $2a_A = -a_B$. Po určení sily $N_L = 327N$ v lane, z rovnice $v_B = v_{B0} + a_B t$ pre rýchlosť hmotného bodu B dostaneme, že v čase $t = 2s$, je $v_B = -13{,}1 ms^{-1}$.

b) Výsledok $v_B = -13{,}1 ms^{-1}$ dostaneme aj z rovníc pre impulz sily a dráhových hybností $\sum m_A (v_A)_1 + \sum \int_{t1}^{t2} F_y dt = \sum m_A (v_A)_2$ pre bod A aj pre bod B:

$$\sum m_B (v_B)_1 + \sum \int_{t1}^{t2} F_y dt = \sum m_B (v_B)_2 .$$

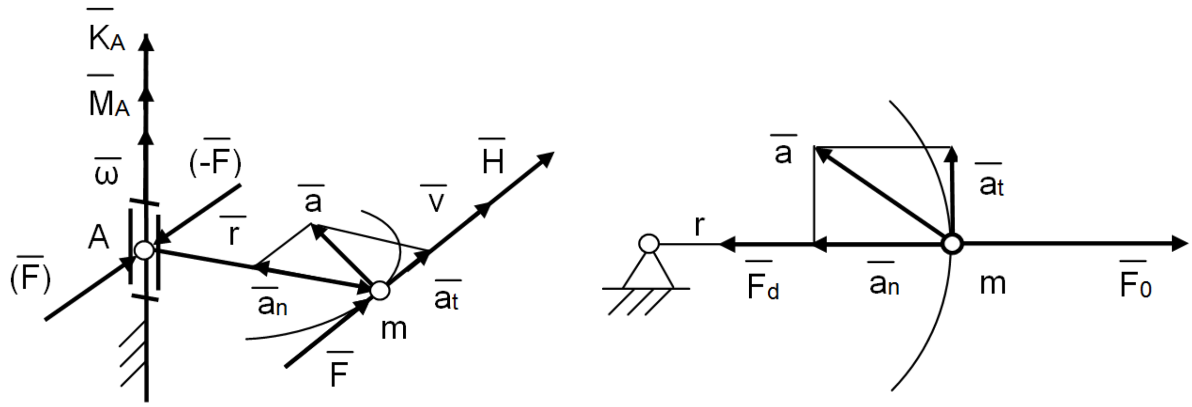
Dynamika hmotného bodu pri krivočiarom pohybe

Príklad č.3

Sprievodič r dĺžky r = 1m hmotného bodu m = 1 kg na obr. 3 b) sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou $\omega = 1$ rad s^{-1}. Aká je dostredivá $\overline{F}_d$ a odstredivá sila $\overline{F}_0$ pôsobiaca na hmotný bod?

Riešenie

Aby sa hmotný bod pohyboval po kružnici zabezpečí geometrická väzba vo forme primárnej dostredivej sily $\overline{F}_d$, ktorá vyvolá sekundárnu reakčnú odstredivú silu $F_0 = mr\omega^2$. Po dosadení $F_0 = 1N$.



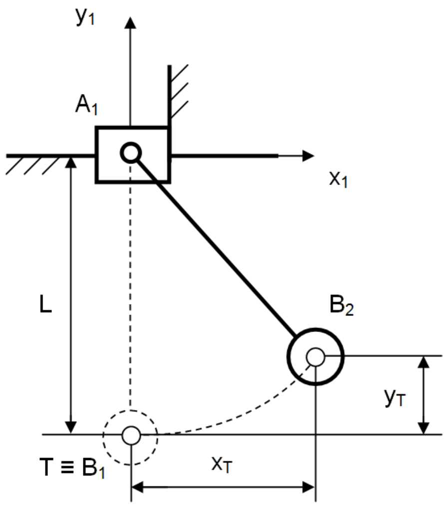
Obr.3 a) rotujúci sprievodič hmotného bodu, b) akčná dostredivá a reakčná odstredivá sila.

Príklad č.4

Mačka A žeriavu, ktorá sa spolu s bremenom sústredenom v hmotnom bode B hmotnosti m na lane dĺžky $L = 6$ m (obr. 4) pohybuje rovnomerne rýchlosťou $v = 6\ \mathrm{ms}^{-1}$, náhle narazí na doraz.

Úloha

Uplatnite zákon zachovania energie a vypočítajte súradnice x_T a $y_T = h$ polohy bodu B_2 , do ktorej sa dostane bremeno B po náraze mačky A.



Obr.4 Mačka A žeriavu s bremenom B.

Riešenie

Kinetická energia: $E_K = \frac{1}{2} m v^2$, polohová energia: $E_P = mgh$, celková energia:

$$E_C = E_K + E_P = \text{konšt.}\quad \frac{1}{2} m v^2 = mgh,\ h = \frac{v^2}{2g}$$

Vzdialenosť x_T určíme z trojuholníka

$$x_T = \sqrt{L^2 - (L - y_T)^2}$$