Technická mechanika II
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

2. Cvičenie: Vektorová metóda kinematickej analýzy polohy členov rovinných mechanizov. Numerická Newton-Raphson-Simpsonova (N-R-S) metóda.

Kinematická analýza

Cieľom kinematickej analýzy polohy členov daného rovinného mechanizmu so známymi začiatočnými hodnotami všetkých súradníc polohy členov a predpísaným pohybom vstupného hnacieho člena/členov je určiť časový priebeh počtu $d = 2k + s_1$ závislých súradníc polohy výstupných členov, kde k je počet základných slučiek a s_1 je počet geometrických väzieb (spojení) typu $t = 1$.

Slučkové rovnice

Na určenie časového priebehu počtu d závislých súradníc polohy výstupných členov je potrebné zostaviť počet d lineárne nezávislých algebrických slučkových rovníc (väzobných rovníc) podľa typu mechanizmu.

Vektorové slučkové Rovnice

V rovinnom mechanizme je pre každú základnú slučku podmienka uzavretia mnohouhoníka získaného z kinematickej schémy

$$\sum_{j=1}^{p_{si}} \overline{h}_{ij} = \overline{0}\,,\ i = 1,2,...,k\,,\ j = 1,2,\ ...,p_{si}$$

kde p_{si} je počet orienovaných strán mnohouhlolníka.

Príklad 1

Pri kinematickej analýze polohy členov kľukového mechanizmu podávača z obr.1 je úlohou určiť časový priebeh počtu $d = 2$ závislých globálnych súradníc ψ_{zi}, $i = 1, 2, ..., d$ polohy členov $\psi_{z1} = \psi_{13}$, $\psi_{z2} = p_{14}$ v závislosti od predpísaného priebehu počtu $n = 1$ nezávislých globálnych súradníc ψ_{ni}, $i = 1, 2, ..., n$ polohy hnacích členov $\psi_{n1} = \psi_{12}$ (n je zároveň pohyblivosť mechanismu), pričom celkový počet m globálnych súradníc ψ_i, $i = 1, 2, ..., m$ je $m = n + d$.

Vektorové slučkové rovnice

V jednoslučkovom kľukovom mechanizme podávača na obr.1 je podmienka uzavretia mnohouholníka O_1ABC

$$\sum_{j=1}^{p_{si}} \overline{h}_{ij} = \overline{0}\,,\ i = 1,2,...,k\,,\ j = 1,2,\ ...,p_{si} \qquad (1)$$

kde p_{si} je počet orienovaných strán. Pre $k = 1$ index i vynecháme a odpovedajúca vektorová slučková rovnica podľa zvoleného zmyslu ščítania je

$$-\overline{h}_1 + \overline{h}_2 + \overline{h}_3 - \overline{p}_{14} = \overline{0} \qquad (2)$$

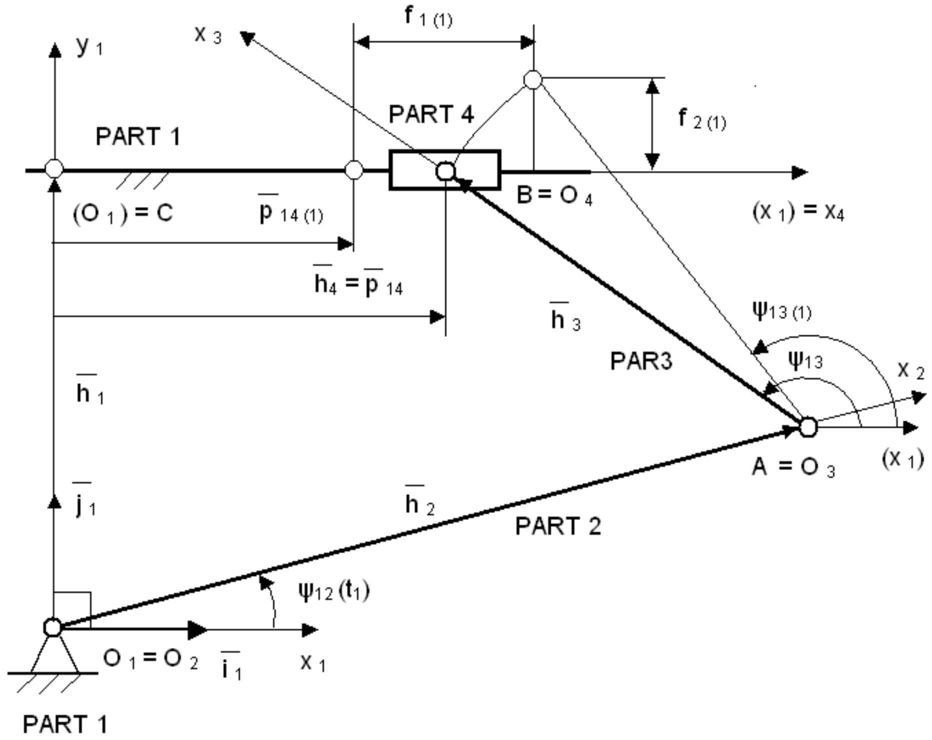
Skalárne slučkové rovnice

Skalárne slučkové ako priemety vektorov z mnohouholníka do smerov osí x_1, y_1 získame vynásobením jednotkovými vektormi $\overline{i}_1, \overline{j}_1$

$$-h_1 c\alpha_1 + h_2 c\psi_{12} + h_3 c\psi_{13} - p_{14} c\alpha_4 = 0 \qquad (3)$$

$$-h_1 s\alpha_1 + h_2 s\psi_{12} + h_3 s\psi_{13} - p_{14} s\alpha_4 = 0 \qquad (4)$$

kde $\alpha_1 = \triangleleft(x_1, y_1)$ a $\alpha_4 = \triangleleft(x_1, x_4)$



Obr.1 Východisková konfigurácia členov kľukového mechanizmu podávača v čase $t = t_1$.

Zápis aritmetickými vektormi

Skalárne slučkové väzobné rovnice (3), (4) zapíšeme pomocou aritmetických vektorov

$$f_i(\bar{\psi}_z) \approx f_i(\psi_{z1},...,\psi_{zd}) = 0, \ i = 1,2,...,d \qquad (5)$$

Presné riešenie

Na určenie presných hodnôt riešenia skalárnych väzobných rovníc (3), (4), (závislých globálnych súradníc ψ_{zi}, $i = 1,2,...,d$ polohy členov $\psi_{z1} = \psi_{13}$, $\psi_{z2} = p_{14}$) z nelineárnych algebrických transcendentných rovníc (5) doteraz nie je známy algoritmizovateľný postup.

Približné riešenie

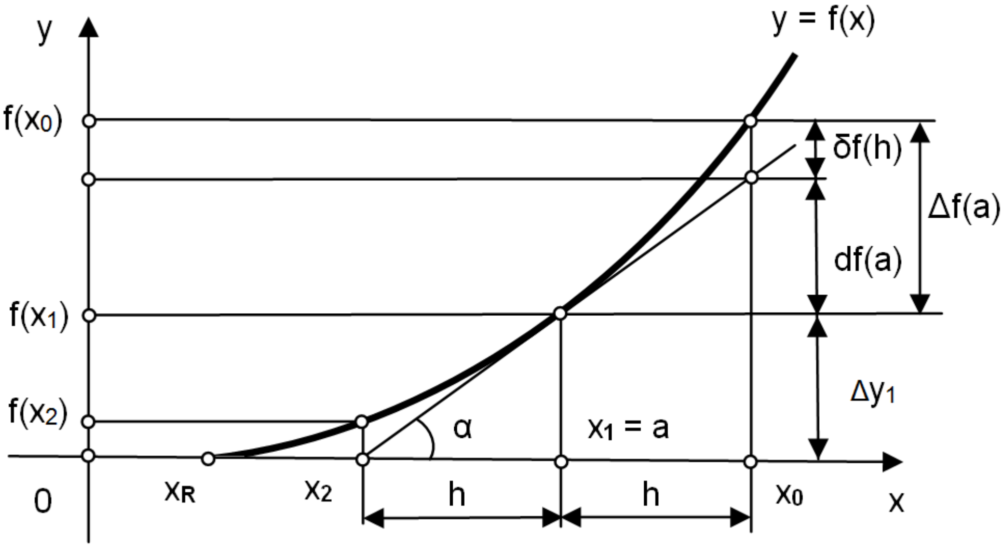
Približné hodnoty riešenia nelineárnych algebrických transcendentných rovníc (5) s vyžadovanou presnosťou je vždy možné získať numericky algoritmizovateľnou Newton-Raphson-Simpsonovou (N-R-S) iteračnou metódou.

Taylorov rad

Anglický matematik Brook Taylor (1685,1731) navrhol využiť na vyjadrenie funkcie f súčet nekonečného počtu členov (6) (Taylorov rad) získaných z derivácií tejto funkcie v bode a. Pre predpísanú presnosť nahradenia (aproximácie) funkcie stačí uvažovať konečný počet n členov radu (Taylorov polynóm).

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (6)$$

kde $n!$ je faktoriál čísla n a $f^{(n)}(a)$ je n tá derivácia funkcie f vyčíslená v bode a. Nultá derivácia funkcie f je samotná funkcia f a hodnota výrazu $(x-a)^0$ a $0!$ sa rovná 1.



Obr.2 Nahradenie (aproximácia) funkcie $y = f(x)$ v bode $x_1 = a$ a v bode $x_0 = x_1 + h$.

Odhad x_0	Po dosadení prvého odhadu x_0 riešenia (koreňa) do rovnice $y = f(x)$ dostaneme zvyšok $f_{(1)} = f(x_0)$.
Rozdiel-diferencia Δx	Pre konečný prírastok (rozdiel) $\Delta x = x_1 - x_0$, teda $\Delta x = h$ premennej x sa hodnota funkcie $y = f(x)$ zmení o prírastok (rozdiel-diferencia) $\Delta y = f(x_0) - f(x_1)$, teda $\Delta y = \Delta f(a)$.
Derivácia $f'(x_1)$	Deriváciu $f'(x_1) = \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = tg\alpha$ funkcie $y = f(x)$ v bode x_1 môžeme zapísať ako $f'(x_1) = \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \dfrac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$, potom pre $x_2 = x_1 - \Delta x_1$ a pre $f(x_R) = 0$ po dosadení dostaneme $f'(x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_R)}{x_1 - x_2}$, z čoho $f(x_R) = f(x_1) + f'(x_1)\Delta x_1$.
Diferenciál $df(a)$	Differenciál $df(a)$ funkcie $y = f(x)$ pre prírastok (rozdiel) $\Delta x = h$ v bode $x_1 = a$ je $df(a) = f'(a)h$.
Odchýlka $\delta f(h)$	Odchýlka (deviácia) $\delta f(h)$ je výsledok nahradenia rozdielu $\Delta y = \Delta f(a)$ diferenciálom $df(a)$.
Riešenie funkcie	Riešením (koreňom) funkcie $y = f(x)$ je presná hodnota súradnice x_R priesečníka funkcie $y = f(x)$ s osou x, teda po dosadení riešenia je $f(x_R) = 0$.
Newtonova approximácia	Isaac Newton (1642, 1727) navrhol v roku 1671 nahradiť nelineárnu funkciu $y = f(x)$ v bode $x_1 = a$ tangentou, ale aplikoval to len na polynómy.
Raphsonova aproximácia	Joseph Raphson (1648, 1715) vyvinul v roku 1690 jednoduchšiu algebrickú metódu s postupnými nahradeniami (aproximáciami).
Simpsonova aproximácia	Thomas Simpson (1710, 1761) zovšeobecnil v roku 1740 Newtonovu a Raphsonovu metódu do dnešnej podoby s využitím diferenciálov.

Poskladanie mechanizmu Kinematická analýza polohy členov mechanizmu začína poskladaním mechanizmu (obr. 1) podľa daných rozmerov (dĺžky, uhly) do východiskovej konfigurácie v čase $t = t_1$ v ktorom sú nezávislé globálne súradnice $\psi_{n\,i}$, $i = 1, 2, ..., n$ polohy hnacích členov konštantné (v príklade 1 je to $\psi_{n\,1} = \psi_{12}(t_1)$) a neznáme závislé globálne súradnice ψ_{13}, p_{14} odhadneme (začiatočný-prvý odhad $\psi_{13(1)}$, $p_{14(1)}$).

Zvyšky (reziduá) Mnohouholník O_1ABC (obr. 1), ktorý je uzatvorený pri presných hodnotách (riešení) závislých globálnych súradníc polohy členov $\psi_{z1} = \psi_{13}$, $\psi_{z2} = p_{14}$ sa pro dosadení odhadnutých hodnôt (začiatočný odhad $\psi_{13(1)}$, $p_{14(1)}$) roztvorí, čím vzniknú zvyšky $f_{1(1)}$, $f_{2(1)}$ (reziduá). Neznáme závislé globálne súradnice ψ_{13}, p_{14} sa podarí získať s vyžadovanou presnosťou, ak spresníme začiatočný odhad korekciami $\Delta\psi_{13(1)}$, $\Delta p_{14(1)}$ a zmenšíme zvyšky, teda

$\psi_{13(2)} = \psi_{13(1)} + \Delta\psi_{13(1)}$

$p_{14(2)} = p_{14(1)} + \Delta p_{14(1)}$

.

N-R-S metóda Jednou z možností ako určiť korene $\bar{\psi}_z$ rovníc (5), teda neznáme závislé globálne súradnice ψ_{13}, p_{14} s vyžadovanou presnosťou je využiť hodnoty začiatočného odhadu $\bar{\psi}_{z(1)}$ a známe hodnoty všetkých parciálnych derivácií $\dfrac{\partial \bar{f}(\bar{\psi}_{z(1)})}{\partial \bar{\psi}_z}$, $\dfrac{\partial^2 \bar{f}(\bar{\psi}_{z(1)})}{\partial \bar{\psi}_z^{\,2}}$ Taylorovho radu tak, aby sme po dosadení hodnôt spresneného aritmetického vektora $\bar{\psi}_{z(2)}$ čo najviac priblížili k podmienke $\bar{f}(\bar{\psi}_{z(2)}) = \bar{0}$ uzatvorenosti mnohouholníka O_1ABC (obr. 1). Podstata numerickej N-R-S metódy spočíva v tom, že namiesto výpočtu všetkých derivácií aproximujeme Taylorov rad prvým lineárnym členom a východiskový odhad $\bar{\psi}_{z\,(r)}$, $r = 1$, iteráciami spresňujeme korekciami $\Delta\bar{\psi}_{z\,(r)}$, kým sa nedosiahne vyžadovaná presnosť závislých súradníc polohy.

Linearizácia Vo východiskovej konfigurácii mechanizmu prebehne linearizácia nelineárnych algebrických väzobných rovníc (5) $\bar{f} = \lceil f_1, ..., f_d \rceil$ súčtom zvyškov $\bar{f}_{(r)}$ so súčinom prvého lineárneho člena Tylorovho radu s neznámymi korekciami $\Delta\bar{\psi}_{z\,(r)}$

$$\bar{f} \cong \bar{f}_{(r)} + V_{(r)}\Delta\bar{\psi}_{z\,(r)} \qquad (6)$$

kde r je číslo iteračného kroku.

Zvyšky

Zvyšky (reziduá) $\bar{f}_{(\mathrm{r})}$ dostaneme po dosadení východiskového odhadu $\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}$, $\mathrm{r}=1$ závislých súradníc do väzobných rovníc (5),

Jakobián

Prvky matice $V_{(\mathrm{r})}$ (Jakobián) rádu $(\mathrm{d\ x\ d})$ dostaneme deriváciami

$$V_{(\mathrm{r})}=\left[\frac{\partial \mathrm{f_i}}{\partial \psi_{\mathrm{z\,j}}}\right]_{(\mathrm{r})},\ \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{m},\ \mathrm{a}\ \ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{d} \qquad (7)$$

Korekcie

Aritmetický vektor korekcií $\Delta\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}$ sa potom dá určiť zo sústavy lineárych rovníc (6).

Numerické riešenie

Po dosadení presného riešenia $\bar{\psi}_{\mathrm{z}}$ do sústavy nelineárnych algebrických rovníc (5) dostaneme $\bar{f}=\bar{0}$, ale po dosadení aritmetického vektora odhadov $\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}$ budú nenulové zvyšky $\bar{f}_{(\mathrm{r})}\neq\bar{0}$ teda aj rovnice $\bar{f}\neq\bar{0}$. Iteračný proces konvergujúcej (N-R-S) metódy

$$\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r+1)}}=\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}+\Delta\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}},\ \mathrm{r}=1,2,...,\mathrm{p} \qquad (8)$$

skončí, ak norma $\left\|\Delta\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}\right\|$ korekcií splní podmienku

$$\left\|\Delta\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r)}}\right\|\leq\varepsilon \qquad (9)$$

Vtedy bude aritmetický vektor $\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r+1)}}$ predstavovať prijateľné riešenie, lebo norma $\left\|\bar{f}_{(r)}\right\|$ zvyškov splní podmienku $\left\|\bar{f}_{(r)}\right\|\leq\varepsilon$, teda najväčší zvyšok bude menší ako daná tolerancia ε.
Aritmetický vektor $\bar{\psi}_{\mathrm{z\,(r+1)}}$ vtedy spĺňa všetky väzobné rovnice (5).
V našom príklade 1 (obr.1) väzobné rovnice (3), (4) linearizujeme podľa rovnice (6)

$$\mathrm{f_1}\cong\mathrm{f_{1(1)}}+\left[\frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \psi_{13}}\right]_{(1)}\Delta\psi_{13(1)}+\left[\frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{p_{14}}}\right]_{(1)}\Delta \mathrm{p}_{14(1)} \qquad (10)$$

$$\mathrm{f_2}\cong\mathrm{f_{2(1)}}+\left[\frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \psi_{13}}\right]_{(1)}\Delta\psi_{13(1)}+\left[\frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{p_{14}}}\right]_{(1)}\Delta \mathrm{p}_{14(1)} \qquad (11)$$

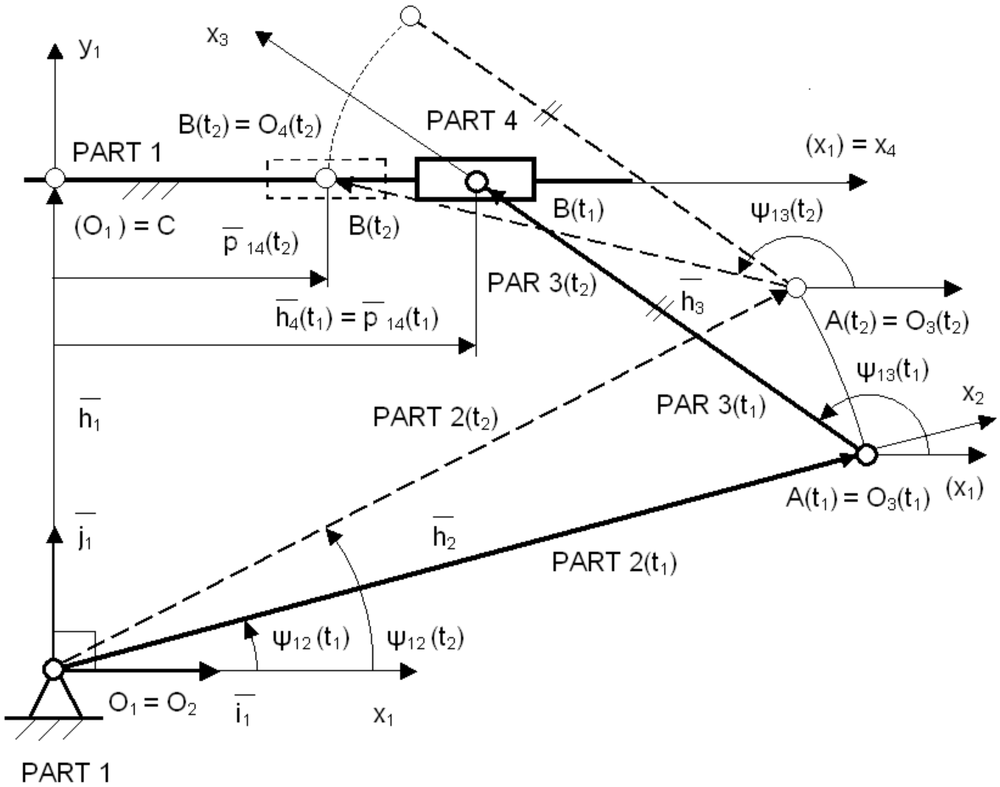
Korekcie $\Delta\psi_{13(1)}$, $\Delta\mathrm{p}_{14(1)}$ získané riešením lineárnych rovníc (10), (11) slúžia na získanie závislých súradníc polohy hnaných členov $\psi_{13(2)}$, $\mathrm{p}_{14(2)}$ v druhom iteračnom kroku, ktorý pri konvergencii metódy spresňuje začiatočný odhad $\psi_{13(1)}$, $\mathrm{p}_{14(1)}$,

$$\psi_{13(2)}=\psi_{13(1)}+\Delta\psi_{13(1)} \qquad (12)$$

$$\mathrm{p}_{14(2)}=\mathrm{p}_{14(1)}+\Delta\mathrm{p}_{14(1)} \qquad (13)$$

Kinematická analýza

Cieľom kinematickej analýzy polohy členov je určiť priebeh $\overline{\psi}_z(t)$ závislých súradníc polohy hnaných členov ψ_{zi}, $i = 1, 2, ..., d$ v závislosti od daného priebehu $\overline{\psi}_n(t)$, nezávislých súradníc polohy vstupných hnacích členov ψ_{ni}, $i = 1, 2, ..., n$. Pre prírastok $in\overline{\psi}_n(t_1) = \overline{\psi}_n(t_2) - \overline{\psi}_n(t_1)$ nezávislých súradníc polohy vstupných hnacích členov (obr.2), pre zvolený časový krok $h = t_2 - t_1$ bude aritmetický vektor závislých súradníc polohy hnaných členov $\overline{\psi}_z(t_1)$ získaný z procesu poskladania v čase $t = t_1$ pre N-R-S metódu novým odhadom.



Obr.2 Konfigurácie členov kľukového mechanizmu podávača v časových krokoch t_1, t_2.