**Technická mechanika II**
210 322 BEK, 210 202 BDS
pre bakalárov, zimný sem.
doc.Ing.František Palčák, PhD., ÚAMM 02010

## 11. Cvičenie: Analytická mechanika, princíp virtuálnej práce. Pojmy, prístupy a metódy v mechanike

### Prístup Newtonovskej mechaniky

| | |
|---|---|
| Predurčený prístup | Ak na súmanie sústavy telies použijeme príčinný (kauzálny) prístup Newtonovskej vektorovej mechaniky, tak treba zostavoviť dynamické pohybové rovnice s vektorovými veličinami (dráhová hybnosť, sila,..) a väzobné rovnice z geometrických, kinematických a dynamických väzieb pre každý prvok sústavy.<br>Ide o lokálny, bezprostredný prístup, bez plánovania, pri ktorom správanie sústavy vychádza z daného okamžitého stavu. Sústava je donútená správať sa lokálne podľa okamžitého stavu a nepotrebuje si pamätať čo sa udialo.<br>Tento predurčený (deterministický) spôsob správania vylučuje slobodnú vôľu a tým vylučuje aj vznik rozporu medzi tým, čo je prikázané a čo by prípadne sústava chcela urobiť inak. Cieľom je kvantitatívny výsledok.<br>V teórii riadenia sústav to je prípad riadenia bez spätnej väzby, teda jedná sa o ovládanie (nútenie). |
| Poloha | Vzájomná poloha (konfigurácia) bodov a telies sústavy je daná súborom karteziánskych súradníc polohy $\{x_i, y_i, z_i\}_{i=1,2,\ldots,N}$. |
| Stav | Stav (okrajové podmienky v konfigurácii) bodu a telies sústavy je daný súborom karteziánskych súradníc polohy a ich derivácií (rýchlostí) $\{x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\}_{i=1,2,\ldots,N}$. |

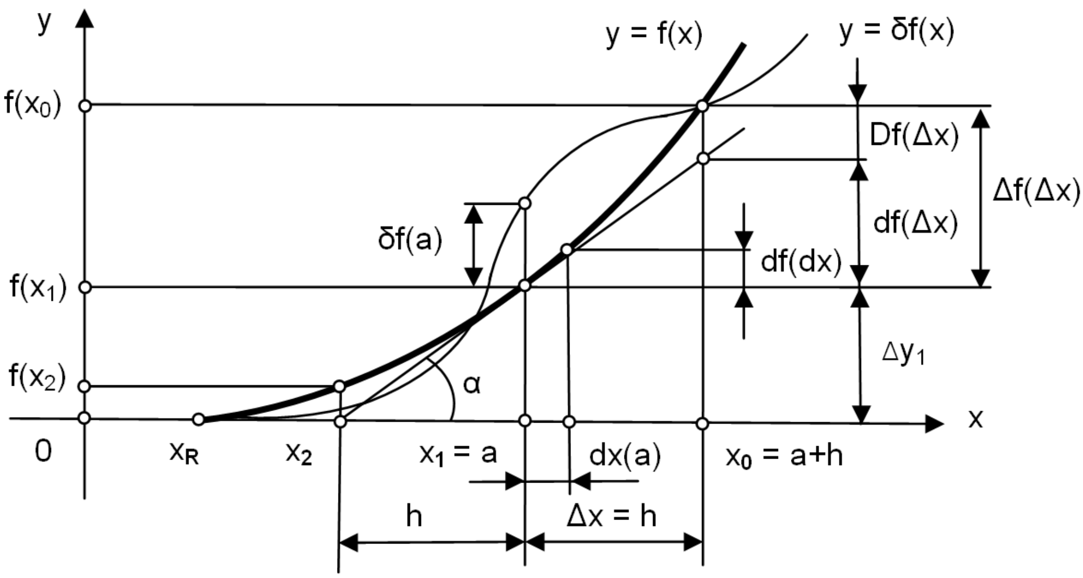
### Prístup analytickej mechaniky

| | |
|---|---|
| Cieľavedomý prístup | Účelový (teleologický) prístup analytickej mechaniky vychádza zo všeobecného pohľadu na sústavu a okolité prostredie ako na celok a namiesto vektorových pohybových rovníc pre každý prvok sústavy v analytickej mechanike využívame zovšeobecnené princípy, ktoré využívajú skalárne veličiny (kinetická energia, práca,..).<br>Celok sa správa účelne, cieľavedome tak, aby splnil danú globálnu požiadavku (účel, cieľ) v každom okamihu od východiskového po konečný stav. Pri okamžitom rozhodovaní celok koná lokálne ale myslí globálne.<br>Cieľom je kvantitatívny aj kvalitatívny výsledok.<br>V teórii riadenia sústav to je prípad riadenia so spätnou väzbou, teda ide o reguláciu a vo vyspelej forme správania sa sústavy o samoreguláciu (dobrovoľnosť). |

Diferenciál d*t* — Ak sa čas $t$ v určitom okamihu zmení o nekonečne malý prírastok (diferenciál) d$t$, veličina $q(t)$ sa tiež zmení o *diferenciál* d$q$.

Variácia $\delta q$ — Ak v čase t = x pripočítame k funkcii y = f(x), ktorá reprezentuje fyzikálnu veličinu f, hodnotu $\varepsilon g(x)$, kde $g(x)$ je ľubovoľná „rozumná“ funkcia a $\varepsilon$ je konštanta s hodnotou blížiacou sa k nule, potom výraz $\delta q = \varepsilon g(x)$ nazývame izochrónnou *variáciou funkcie* y = f(x). Zmena $\delta q(x)$ nastáva v rovnakom okamihu t = x ako zmena funkcie y = f(x), to znamená, že sa realizuje pri zastavenom čase. Začiatočné a konečné hodnoty funkcie y = f(x) a variovanej funkcie y = δf(x) sú na danom intervale ($x_R$, $x_0$) rovnaké a prebiehaú vo väzobnej rovine O (x,y).

Ak by sme zvolili $\delta f$ = d$f$ a pokúsili sa vzniknutý výraz integrovať, to by znamenalo, že v zastavenom čase x = $t$ pridáme k funkcii $q(x)$ hodnotu $\varepsilon\dot{q}(x)$, teda bod $q(x)$ sa premiestni a variáciu by sme už nemohli voliť ľubovolne (napríklad nulovú v koncových bodoch integračného intervalu), lebo by bola daná hodnotou derivácie tejto funkcie.




Obr.1 Priebeh funkcie y = f(x) a jej variácie y = δf(x)

Diferencia Δx — Pre konečný prírastok (rozdiel, diferenciu) Δx=h premennej x sa hodnota funkcie y = f(x) zmení o prírastok (rozdiel, diferenciu) Δy = Δf(Δx).

Derivácia f'($x_1$) — Rovnicou $f'(x_1) = \Delta y_1/\Delta x_1 = \mathrm{tg}\alpha$ je daná derivácia funkcie y = f(x) v bode $x_1$.

Diferenciál df(Δx) — Diferenciál df(Δx) funkcie y = f(x) pre konečný prírastok (rozdiel, diferenciu) Δx = h v bode $x_1$ = a je $df(\Delta x) = f'(a)\Delta x$.

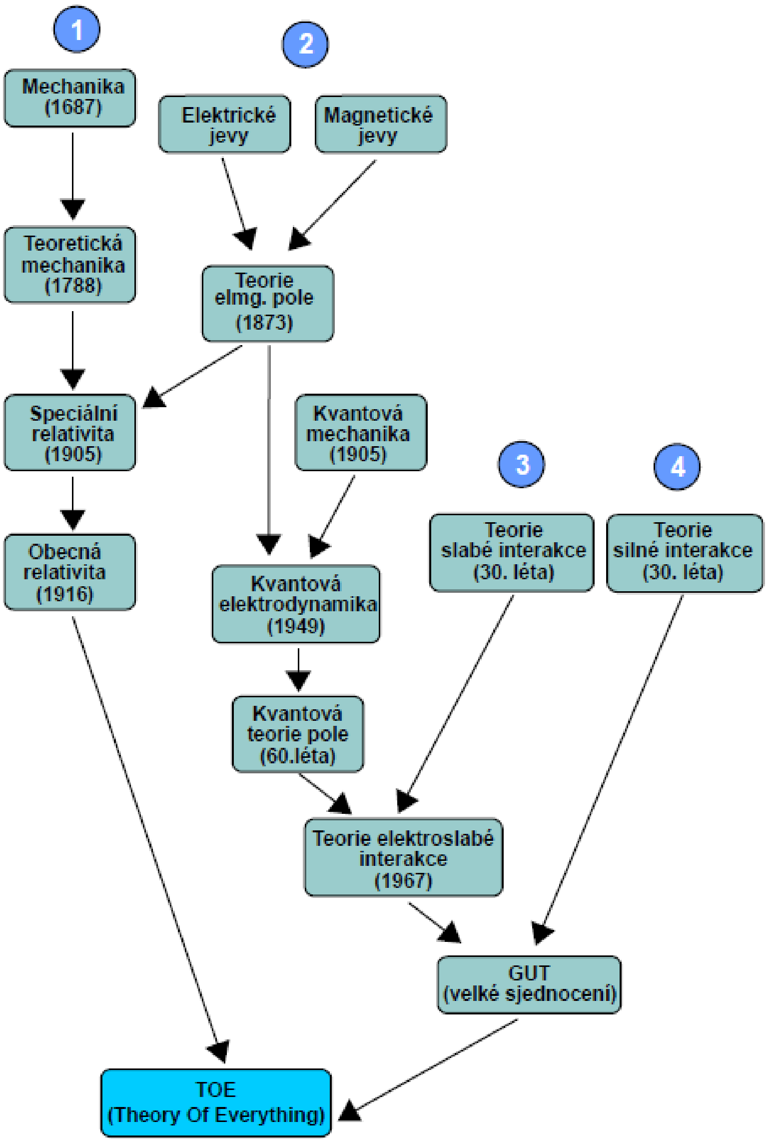
Diferenciál df(dx) — Diferenciál df(dx) funkcie y = f(x) pre nekonečne malý prírastok (diferenciál) dx(a) v bode $x_1$ = a je $df(dx) = f'(a)dx$.

Deviácia Df(Δx) — Deviácia Df(Δx) je odchýlka pri nahradení rozdielu (diferencie) Δy = Δf(Δx) diferenciálom df(Δx).

Variácia δf(a) — Variácia δf(a) funkcie y = f(x) prebieha v zastavenom čase x = a .

Aproximácia — Newtonova aproximácia je nahradenie nelineárnej funkcie y = f(x) v bode $x_1$ = a priamkou (dotyčnicou).

**Historický vývoj fyziky**




V prírode poznáme štyri silové interakcie: 1. gravitačnú, 2. elektromagnetickú, 3. silnú a 4. slabú. Gravitačná interakcia pôsobí na všetky častice bez výnimky, ale pre gravitačnú interakciu kvantová teória predpokladá existenciu zatiaľ hypotetických intermediálnych častíc: gravitónov. Elektromagnetická interakcia pôsobí len na častice s elektrickým nábojom, silná interakcia pôsobí na hadróny (hadros = silný) - hadróny delíme na mezóny zložené z kvarkov a antikvarkov a baryóny zložené z troch kvarkov. Slabá interakcia pôsobí na leptóny a hadróny.
V súčasnosti prebieha integračný proces - snaha o jednotný opis fyzikálnych javov.
Spoznaním spoločnej podstaty elektrických a magnetických javov (Oersted, Faraday, Maxwell) a vnikla v minulom storočí teória elektromagnetického poľa.
Po vzniku kvantovej teórie sa objavila príslušná kvantová analógia - kvantová elektrodynamika a kvantová teória elektromagnetického poľa.
V relatívne nedávnej dobe sa podarilo "spojiť" elektromagnetickú a slabú interakciu do teórie elektroslabej interakcie (Weinberg, Salam).
Teraz prebiehajú intenzívne pokusy pripojiť k teórii elektroslabej interakcie ešte interakciu silnú (veľké zjednotenie) a s gravitačnou silovou interakciou utvoriť teóriu „všetkého“.

## Historický vývoj analytickej dynamiky

***Isaac Newton*** (1643-1727)
Prvou ucelenou teóriou pohybu mechanických sústav bola Newtonova formulácia klasickej mechaniky v ***Matematických princípoch prírodnej filozofie*** (1687). Základným zákonom teórie bol druhý Newtonov zákon, označovaný tiež ako pohybový zákon, pretože sa z neho dalo stanoviť po akej krivke sa bude pohybovať hmotný objekt, na ktorý pôsobí daná sila: *"Zmena pohybu je úmerná pôsobiacej sile a deje sa pozdĺž nositeľky pôsobiacej sily."* Inými slovami, ak na konkrétne teleso s konkrétnou hodnotou hmotnosti a hybnosti pôsobí konkrétna sila, tak ho núti, aby sa pohybovalo po konkrétnej dráhe. Aj keď sa rôzne objekty sa podriaďujú tomu istému zákonu, lenže zo zákona sa nedajú získať ani objekty (s konkrétnou hodnotou hmotnosti a hybnosti, na ktoré pôsobia konkrétne sily) ani odlišnosti medzi nimi. Pre každý konkrétny prípad (sily, hybnosti, hmotnosti, pohybu) treba hľadať nový postup riešenia mechanickej úlohy.

***Leonhard Euler*** (1707-1813)
Ďalší krok vo vývine mechaniky urobil Euler, keď preformuloval druhý Newtonov zákon. Eulerova formulácia pohybového zákona sa líši od Newtonovej v tom, že:
1. pribudla vzťažná sústava - zrýchlenie *a* definujeme buď cez F2 a m2, alebo cez F1 a m1,
2. dostávame všeobecný zákon v podobe diferenciálnej rovnice, ktorá poskytuje možnosť univerzálnym spôsobom riešiť akékoľvek mechanické úlohy.

***Jean Baptiste le Rond d´Alembert*** (1717-1783)
1. d´Alembertov princíp mení dynamickú úlohu o pohybe účinkom sily na statickú úlohu o rovnováhe viacerých síl. Inými slovami zrovnoprávňuje pokoj a pohyb, čiže opäť nastoľuje rovnováhu, ktorá sa porušila pri prechode od statickej rovnováhy k dynamickému pohybu;
2. zavedením novej zotrvačnej sily zjednotil a zrovnoprávnil všetky druhy síl: aktívne sily, sily od väzby i sily zotrvačnosti;
3. vďaka tomu sa do jedného opisu zjednotili rôzne druhy pohybu:
   a) pohyb voľnej častice (**F** = O, **R** = O),
   b) častice bez väzby pohybujúcej sa účinkom sily **F** (**R** = 0),
   c) viazanej častice (nenulové **R**) pod účinkom sily **F**.

***Joseph Louis de Lagrange*** (1736-1813)
Vyvrcholením vývoja klasickej mechaniky boli práce Josepha Louisa Lagrangea, zavŕšené vydaním jeho ***Analytickej mechaniky*** (1788). Lagrange vyslovil princíp virtuálneho premiestnenia: *"Ak hmotný bod viazaný obojstrannou hladkou väzbou je v rovnovážnej polohe, elementárna práca aktívnych síl sa pri ľubovoľnom virtuálnon premiestnení z tejto polohy rovná nule."*
Kombináciou princípu virtuálneho posunutia a d´Alembertovho princípu (tzv. Lagrangeov-d´Alembertov princíp) potom J. L. Lagrange odvodil všeobecnú rovnicu mechaniky.
Keď napokon Lagrange zaviedol tzv. zovšeobecnené súradnice a zovšeobecnené sily, dostal zo spomínanej rovnice dve sústavy diferenciálnych rovníc: Lagrangeove rovnice prvého druhu a Lagrangeove rovnice druhého druhu. Z nich sa dajú získať:
1. charakteristiky pohybu akejkoľvek sústavy telies: voľnej v širšom zmysle (bez väzby i bez účinku akýchkoľvek síl), telies bez väzby pod účinkom sily i viazaných telies, na ktoré pôsobia sily,
2. pohybové rovnice pre ten najvšeobecnejší prípad
   a) pre akýkoľvek pohyb (voľný, viazaný),

b) pod účinkom sily akéhokoľvek pôvodu (gravitačnej, elektrickej, magnetickej a i.),
c) pre konzervatívne i nekonzervatívne typy síl,
d) vzhľadom na akýkoľvek typ súradníc, či už majú nejaký geometrický význam, alebo charakterizujú iba stupne voľnosti v najširšom zmysle slova (zovšeobecnené súradnice).

Dá sa povedať, že tým sa zavŕšil vývoj mechaniky ako opisu mechanického pohybu hmotných, teda látkových objektov - či už je tento opis charakterizovaný ako zmena geometrických súradníc v čase alebo ako časová zmena akýchkoľvek charakteristík príslušného počtu stupňov voľnosti.

***Carl Gustav Jacobi***(1804–1851) a ***William Rowan Hamilton*** (1805–1865)
Vývin mechaniky sa koncom 18. storočia nezastavil, ale pokračoval aj v 19. storočí, menovite v prácach C. G. Jacobiho a W. R. Hamiltona. Hamilton sformuloval všeobecný princíp, na základe ktorého zjednotil opis pohybu častíc i šírenia svetla. Teda z Hamiltonovho princípu vyplývajú tak Lagrangeove rovnice pre opis pohybu látkových objektov, ako aj rovnice vlnovej i geometrickej optiky (zjednotenie rôznych pohľadov na povahu svetla z hľadiska opisov jeho šírenia). Z Hamiltonovho princípu minimálneho účinku sa dajú odvodiť všetky predchádzajúce variačné princípy, nech už boli v minulosti odvodené v oblasti optiky či mechaniky, teda Heronov, Fermatov, Leibnizov, Maupertuisov i Eulerov princíp. Okrem toho sa v Hamiltonovom formalizme úplne abstrahuje od konkrétneho tvaru dráhy, po ktorej sa objekt pohybuje, lebo účinok je iba funkciou začiatočných a koncových súradníc.

**Princípy v analytickej mechanike**
V analytickej dynamike sú dispozícii jednak diferenciálne princípy platné pre nekonečne malé zmeny veličín aj integrálne princípy pre konečné zmeny veličín s kombináciou nevariačného princípu a variačného princípu na formuláciu podmienok pre extrém veličiny pri jej nekonečne malej, alebo konečnej zmene v rámci možných stavov.

a) Podľa tohto triedenia medzi diferenciálne nevariačné princípy patria najpoužívanejšie Newtonove zákony a Lagrangeove rovnice prvého a druhého druhu a
b) do skupiny diferenciálnych variačných princípov patrí najjednoduchší princíp virtuálnych prác a D`Alambertov princíp, najvšeobecnejší Gaussov princíp najmenšieho nútenia a Hetzov princíp najpriamejšej dráhy.
c) Do skupiny integrálnych nevariačných princípov patrí princíp zachovania energie a
d) medzi integrálne variačné princípy patrí Marpertuisov, Eulerov a Jakobiho princíp najmenšieho účinku a najdôležitejší Hamiltonov princíp.

**Hamiltonov variačný princíp**
Každý zo diferenciálnych, alebo integrálnych princípov má svoje špecifické poslanie no pre algoritmizáciu numerickej integrácie zmiešanej sústavy diferenciálnych pohybových a algebrických väzobných rovníc DAE sa najlepšie osvedčil Hamiltonov variačný princíp:

$$\delta \mathrm{I} \approx \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathrm{L} + \sum_{k=1}^{a} \bar{\mathrm{F}}_{Ak} . \bar{\mathrm{r}}_{Ak} + \sum_{j=1}^{b} \lambda_j \bar{\Phi}\right) \mathrm{dt} = 0$$

$\delta \mathrm{I}$ je variácia funkcionálu $\mathrm{I}$, pre ktorý hľadáme extrém

$\mathrm{L} = \mathrm{E_K} - \mathrm{E_P}$ je Lagrangián ako rozdiel kinetickej $\mathrm{E_K}$ a potenciálnej $\mathrm{E_P}$ energie systému

$\bar{\mathrm{F}}_{Ak}$ sú akčné sily, $k = 1,2,...,a$

$\bar{\mathrm{r}}_{Ak}$ sú sprievodiče pôsobísk akčných síl $\bar{\mathrm{F}}_{Ak}$

$\lambda_j$ sú Lagrangeove súčinitele, $j = 1,2,...,b$

$\bar{\Phi}$ je aritmetický vektor väzobných rovníc $\Phi_j$

**Eulerove-Lagrangeove rovnice**

Z Hamiltonovho integrálneho variačného princípu vyplývajú pohybové diferenciálne Eulerove-Lagrangeove rovnice druhého rádu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\sum_{k=1}^{a}\overline{F}_{Ak}.\frac{\partial \overline{r}_{Ak}}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{b}\lambda_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i}=0\,,\ i=1,2,...,c$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{q}}\right)-\sum_{k=1}^{a}\overline{F}_{Ak}.\frac{\partial \overline{r}_{Ak}}{\partial \overline{q}}+\sum_{j=1}^{b}\lambda_j\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{q}}=\overline{0}$$

kde $\overline{q}$ je aritmetický vektor celkového počtu c zovšeobecnených súradníc $q_i$ , $i=1,2,...,c$ , $\overline{F}_{Ak}$ je počet a akčných síl a $\overline{\Phi}$ je aritmetický vektor počtu b väzobných nelineárnych algebrických rovníc $\Phi_j$.

**Druhy súradníc polohy**

- ak má zovšeobecnená súradnica polohy rozmer dĺžky, zovšeobecnená sila má rozmer sily,
- ak má zovšeobecnená súradnica polohy rozmer uhla pootočenia, zovšeobecnená sila má rozmer viazaného momentu,

**Druhy väzieb**

Holonómna väzba:

- väzobná funkcia obsahujúce len súradnice polohy (alebo primitívnu funkciu rýchlosti),
- obmedzuje len polohu telesa,
- nazývame ju geometrická väzba,

Neholonómna väzba:

- väzobná funkcia obsahujúca súradnice a rýchlosti,
- súčasne obmedzuje polohu aj rýchlosť,
- nazývame ju kinematická väzba (alebo diferenciálna-vystupuje v nej derivácia podľa času),

Ideálna geometrická väzba,

Geometrická väzba s pasívnymi odpormi.

**Druhy síl**

Akčné sily môžu byť väzbové (nepracovné reakcie) a pracovné,
pri ideálnych väzbách (neuvažujeme pasívne odpory) nie je rozdiel medzi silami reakčnými a väzbovými a tiež nie je rozdiel medzi pracovnými a akčnými silami.

**Pojmy v analytickej mechanike**

$q_i$ , $i=1,2,...,c$ je zovšeobecnená súradnica polohy,

$dq_i$ je diferenciál zovšeobecnenej súradnice polohy $q_i$,

$d\overline{r}_i=\sum\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \overline{q}_i}dq_i$ je diferenciál polohového vektora,

$\delta q$ je virtuálne premiestnenie zovšeobecnenej súradnice polohy $q_i$,

$\delta \overline{r}_i=\sum\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \overline{q}_i}\delta q_i$ je virtuálne premiestnenie koncového bodu polohového vektora,

$Q=\sum_{i=1}^{m}\overline{F}_i.\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \overline{q}_i}$ je zovšeobecnená sila,

$\partial W=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i$ je virtuálna práca zovšeobecnených síl v rovnovážnom stave,

$\partial W = \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}_i - m_i \overline{a}_i) \delta \overline{r}_i$ je virtuálna práca akčných a zotrvačných síl pohybujúcej sa sústavy,

$\partial P = \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}_i - m_i \overline{a}_i) \delta \dot{\overline{r}}_i$ je virtuálny výkon akčných a zotrvačných síl pohybujúcej sa sústavy.

**Princíp virtuálnych prác**

Ak sa voľné teleso v rovnovážnom stave, (teda pri pôsobení rovnovážnej sústavy síl a silových dvojíc je v pokoji, alebo koná rovnomerný priamočiary pohyb) virtuálne premiestni, výsledná virtuálna práca $\delta W$ akčných silových účinkov na virtuálnych premiesneniach, ktoré prebiehajú v zastavenom čase (realizujú se okamžite, sú izochrónne), bude nulová $\delta W = 0$.

Virtuálne premiestnenia $\delta q_i$ (posunutia a pootočenia) sú len testovacie premiestnenia, ktoré sa môžu, ale nemusia uskutočniť, teda patria do množiny geometricky a kinematicky prípustných zovšeobecnených premiestnení pôsobísk zovšeobecnených síl, ktoré im umožňujú väzobné podmienky. Virtuálne premiestnenia sú nekonečne malé, aby nebolo potrebné brať do úvahy zmenu vzájomnej polohy (geometrickej konfigurácie).

Ak by sa virtuálne premiestnenia uskutočnili v reálnom čase, boli by to diferenciály a vykonaná elementárna práca by sa za daných podmienok mohla integrovať. Potom by bolo potrebné vziať do úvahy závislosť zovšeobecnených síl na zovšeobecnených premiestneniach.

Virtuálna práca akčných silových účinkov (vo forme zovšeobecnených síl na virtuálnych premiestneniach-izochrónnych variáciách zovšeobecnených súradníc polohy) pôsobiacich na teleso alebo na sústavu telies v rovnovážnom stave bude nulová:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0$$

Táto rovnica nahrádza rovnovážne rovnice dynamickej sústavy, ktoré treba písať pre jednotlivé telesá zo sústavy uvoľnené od väzieb a tým, že neobsahuje neakčné väzobné sily (teda reakcie), má menší počet veličín a výpočet zovšeobecnených súradníc polohy pre rovnovážny stav sa zjednoduší.

**Princíp virtuálnych výkonov pohybujúcej sa sústavy bez pasívnych odporov**

$$\partial P = \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}_i - m_i \overline{a}_i) \delta \dot{\overline{r}}_i = 0$$

mechanická sústava sa pohybuje tak, aby sa algebrický súčet virtuálnych výkonov síl pracovných (akčných) síl a zotrvačných síl rovnal nule.