

2-25510 Technická mechanika I

10. Prednáška

Rýchlosti a zrýchlenia počas súčasných pohybov troch telies

- 1 Výsledná uhlová rýchlosť telesa počas súčasných pohybov troch telies.
- 2 Súčasné pohyby troch telies v otvorenom mechanizme
- 3 Uhlové zrýchlenie podľa Résala a výsledné uhlové zrýchlenie pri súčasných pohyboch.
- 4 Unášavá rýchlosť bodu pri súčasných pohyboch.
- 5 Výsledná okamžitá rýchlosť bodu pri súčasných pohyboch troch telies
- 6 Unášavé zrýchlenie bodu pri súčasných pohyboch troch telies.
- 7 Výsledné zrýchlenie bodu pri súčasných pohyboch.

1 Výsledná uhlová rýchlosť telesa počas súčasných pohybov troch telies

Uhlové rýchlosti Polohový vektor $\bar{r}_{B_{31}}$ bodu $B_{31} = B_1$ zo spojovacieho telesa 3 (ojnice) na obr.1 má súradnice v priestore $\{1\}$. Derivujme vektor $\bar{r}_{B_{31}}$ v iných priestoroch $\{2\}$ a $\{3\}$ podľa pravidla

$$[\bar{r}_{P_a}]_b^{\cdot} = [\bar{r}_{P_a}]_a^{\cdot} + \bar{\omega}_{ab} \times \bar{r}_{P_a} \quad (1)$$

$$[\bar{r}_{B_{31}}]_1^{\cdot} = [\bar{r}_{B_{31}}]_3^{\cdot} + \bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{B_{31}} \quad (2)$$

$$[\bar{r}_{B_{31}}]_1^{\cdot} = [\bar{r}_{B_{31}}]_2^{\cdot} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{B_{31}} \quad (3)$$

$$[\bar{r}_{B_{31}}]_2^{\cdot} = [\bar{r}_{B_{31}}]_3^{\cdot} + \bar{\omega}_{32} \times \bar{r}_{B_{31}} \quad (4)$$

Ak porovnáme rovnice (2), (3) a dosadíme do (4) dostaneme

$$\bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{B_{31}} = \bar{\omega}_{32} \times \bar{r}_{B_{31}} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{B_{31}} \quad (5)$$

Z rovnice (5) po úprave vyplýva, že výsledná okamžitá uhlová rýchlosť $\bar{\omega}_{31}$ všeobecného rovinného pohybu 3/1 spojovacieho telesa 3 (ojnice) voči rámu 1 je daná súčtom:

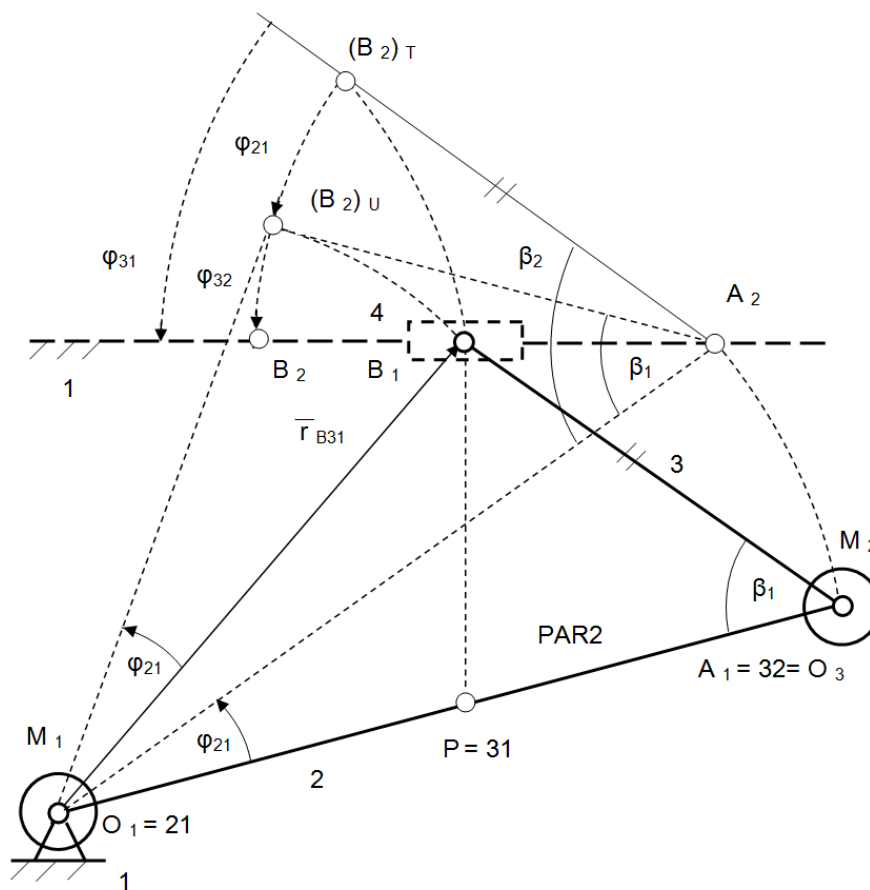
$$\bar{\omega}_{31} = \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21} \quad (6)$$

kde $\bar{\omega}_{32}$ je okamžitá uhlová rýchlosť pri lokálnom relatívnom pohybe 3/2 a $\bar{\omega}_{21}$ je okamžitá uhlová rýchlosť pri unášavom pohybe 2/1.

2 Otvorený mechanizmus na uskutočnenie súčasných pohybov.

Všeobecný rovinný pohyb 3/1 spojovacieho telesa 3 (ojnice) počas premiestňovania úsečky $\overline{A_1B_1}$ z východiskovej polohy $\overline{A_1B_1}$ do konečnej polohy $\overline{A_2B_2}$

môžeme podľa rovnice (6) nahradiť postupnou fiktívnou rotáciou 2/1 a fiktívnou rotáciou 3/2. Počas fiktívnej unášavej rotácie 2/1 (telesa 2 vzhľadom na teleso 1) o uhol φ_{21} okolo osi prechádzajúcej bodom O_1 člen 2 unáša člen 3, ktorý je pri unášavom pohybe súčasťou člena 2 ($3 \equiv 2$), teda pri otáčaní zvierajú stále uhol β_1 . Pri unášavom pohybe 2/1 sa úsečka $\overline{A_1B_1}$ premiestni z východiskovej polohy $\overline{A_1B_1}$ do medzipolohy $\overline{A_2(B_2)_U}$. Počas fiktívnej lokálnej relatívnej rotácie 3/2 okolo osi prechádzajúcej bodom A_2 sa člen 3 pootočí o konečný uhol φ_{32} z polohy $\overline{A_2(B_2)_U}$ do konečnej polohy $\overline{A_2B_2}$.



Obr.1 Otvorený mechanizmus, ktorého rameno 2 poháňa motor M1 a rameno 3 poháňa motor M2.

Otvorený
 mechanizmus

Ma premiestnenie úsečky $\overline{A_1B_1}$ z východiskovej polohy $\overline{A_1B_1}$ do do konečnej polohy $\overline{A_2B_2}$ môžeme

použiť aj trojčlenný otvorený mechanizmus na obr.1, ktorý má pohyblivosť $n=2$, pričom motor M1 poháňa rameno 2 a motor M2 poháňa rameno 3. Úsečka $\overline{A_1B_1}$ môže dosiahnuť konečnú polohu $\overline{A_2B_2}$ na seba nadväzujúcimi pootočeniami φ_{32} , φ_{21} , alebo tak, že obidve pootočenia začnú a skončia súčasne.

Pre konštantnú uhlovú rýchlosť $\omega = \text{const.}$ otáčania je uhol pootočenia $\varphi = \omega t$ a pre čas $t=1s$ je veľkosť $\varphi = \omega$. Výsledný uhol φ_{31} je potom daný súčtom

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21} \quad (7)$$

a príslušné fiktívne konštantné uhlové rýchlosti otáčania ramien 2 a 3 otvoreného mechanizmu sú

$$\bar{\omega}_{31F} = \bar{\omega}_{32F} + \bar{\omega}_{21F} \quad (8)$$

Fiktívne konštantné uhlové rýchlosti z rovnice (8) sa stanú skutočnými okamžitými uhlovými rýchlosťami v rovnici (6) pre nekonečne malé uhly v rovnici (7).

3 Uhlové zrýchlenie podľa Résala a výsledné uhlové zrýchlenie pri súčasných pohyboch

Uhlové
zrýchlenia

Vásledné uhlové zrýchlenie $\bar{\alpha}_{31}$ získame deriváciou rovnice (6): $\bar{\omega}_{31} = \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21}$ podľa času

$$[\bar{\omega}_{31}]_1^\bullet = [\bar{\omega}_{32}]_1^\bullet + [\bar{\omega}_{21}]_1^\bullet \quad (9)$$

Deriváciou $\bar{\omega}_{31}$ v tom istom priestore získame okamžité výsledné uhlové zrýchlenie

$$[\bar{\omega}_{31}]_1^\bullet = \bar{\alpha}_{31} \quad (10)$$

Derivácia $\bar{\omega}_{32}$ so súradnicami v priestore $\{2\}$ v inom priestore $\{1\}$ je

$$[\bar{\omega}_{32}]_1^\bullet = [\bar{\omega}_{32}]_2^\bullet + \bar{\omega}_{21} \times \bar{\omega}_{32} \quad (11)$$

Deriváciou $\bar{\omega}_{32}$ v tom istom priestore získame uhlové zrýchlenie pri lokálnom relatívnom pohybe

$$[\bar{\omega}_{32}]_2^\bullet = \bar{\alpha}_{32} \quad (12)$$

Vektorový súčin $\bar{\omega}_{21} \times \bar{\omega}_{32}$ je Résalovo uhlové zrýchlenie

$$\bar{\alpha}_{RES} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{\omega}_{32} \quad (13)$$

Po dosadení rovníc (10) – (13) do (9) dostaneme rovnicu

$$\bar{\alpha}_{31} = \bar{\alpha}_{32} + \bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{RES} \quad (14)$$

na určenie okamžitého výsledného uhlového zrýchlenia člena 3 pri súčasných pohyboch.

4 Unášavá rýchlosť bodu telesa pri súčasných pohyboch

Unášavá rýchlosť Unášavú rýchlosť \bar{v}_{B21} bodu $B \in 2$ je podľa Cauchyho-Poissonovho návrhu nahradenia pohybu 2/1 translačným a rotačným pohybom daná rovnicou

$$\bar{v}_{B21} = \bar{v}_{A21} + \bar{v}_{BA21}$$

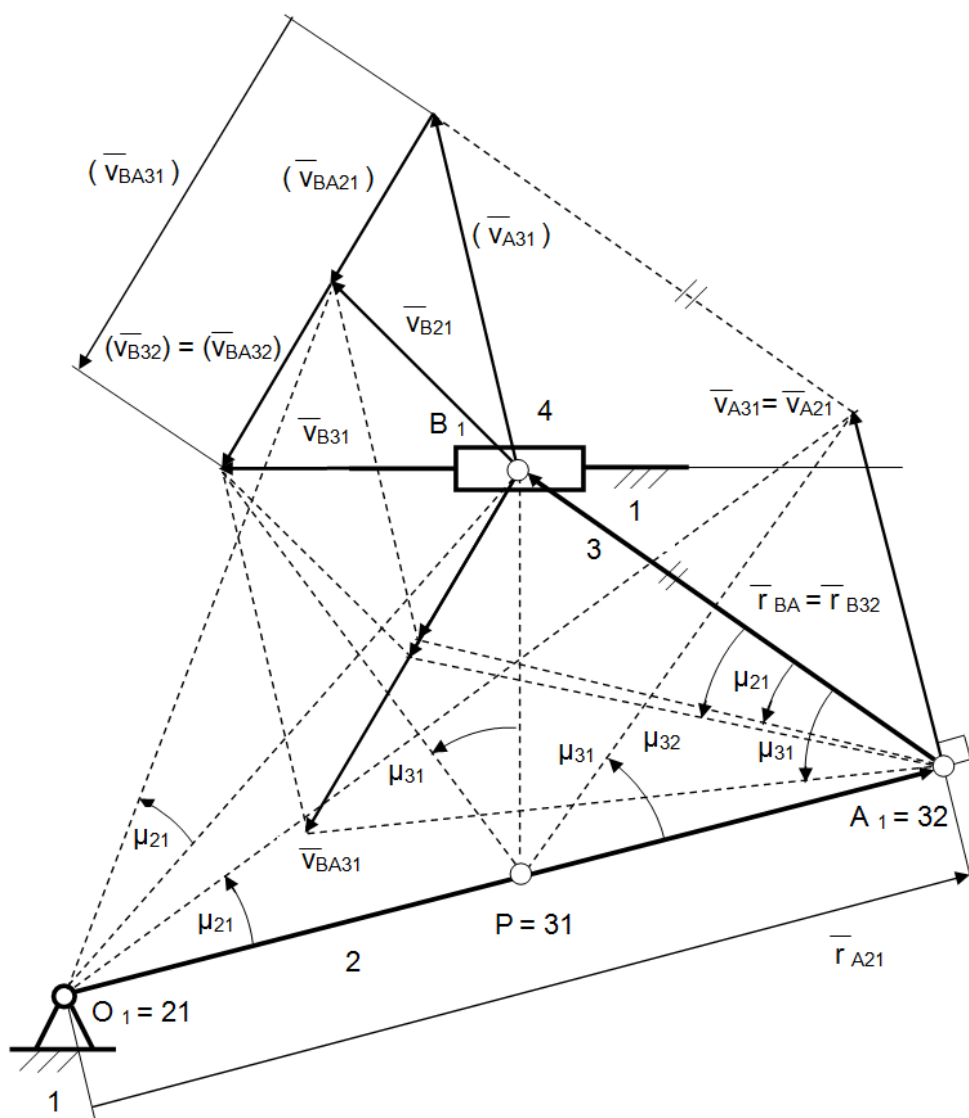
kde rýchlosť \bar{v}_{BA21} bude podľa Eulerovho vzťahu

$$\bar{v}_{BA21} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}, \text{ potom}$$

$$\bar{v}_{B21} = \bar{v}_{A21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA} \quad (1)$$

Označme číslami v zátvorkách dva členy rovnice (1)

$$\bar{v}_{B21} = [\bar{v}_{A21}]_{(1)} + [\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_{(2)} \quad (2)$$



Obr.2 Zobrazenie vektorov okamžitých rýchlostí pri súčasných pohyboch.

5 Výsledná okamžitá rýchlosť bodu pri súčasných pohyboch

Výsledná rýchlosť Výslednú rýchlosť \bar{v}_{B31} získame deriváciou polohového vektora \bar{r}_{B31} podľa času

$$[\bar{r}_{B31}]_1^\bullet = [\bar{r}_{A21}]_1^\bullet + [\bar{r}_{B32}]_1^\bullet \quad (3)$$

Deriváciou v tom istom priestore získame rýchlosti

$$[\bar{r}_{B31}]_1^\bullet = \bar{v}_{B31} \quad (4)$$

$$[\bar{r}_{A21}]_1^\bullet = \bar{v}_{A21} \quad (5)$$

Derivácia vektora \bar{r}_{B32} (so súradnicami v priestore $\{2\}$) v priestore $\{1\}$:

$$[\bar{r}_{B32}]_1^\bullet = [\bar{r}_{B32}]_2^\bullet + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA} \quad (6)$$

$$\text{kde } [\bar{r}_{B32}]_2^\bullet = \bar{v}_{B32} \quad (7)$$

Podľa vzťahu (2) dva členy $[\bar{v}_{A21}]_{(1)}$ a $[\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_{(2)}$ predstavujú unášavú rýchlosť \bar{v}_{B21} .

Po dosadení (4) - (7) do rovnice (3) získame rovnicu

$$\bar{v}_{B31} = \bar{v}_{B32} + \bar{v}_{B21} \quad (8)$$

pre určenie vektora okamžitej výslednej rýchlosti \bar{v}_{B31} bodu B_{31} ako súčtu unášavej \bar{v}_{B21} a lokálne relatívnej rýchlosti \bar{v}_{B32} .

6 Unášavé zrýchlenie bodu pri súčasných pohyboch troch telies

Unášavé zrýchlenie Na získanie unášavého zrýchlenia \bar{a}_{B21} počas fiktívneho unášavého pohybu 2/1, keď ($3 \equiv 2$), treba derivovať podľa času rovnicu (1) $\bar{v}_{B21} = \bar{v}_{A21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}$

$$[\bar{v}_{B21}]_1^\bullet = [\bar{v}_{A21}]_1^\bullet + \bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega}_{21} \times [\bar{r}_{BA}]_1^\bullet \quad (9)$$

Deriváciou v tom istom priestore získame zrýchlenia

$$[\bar{v}_{B21}]_1^\bullet = \bar{a}_{B21} \quad (10)$$

$$[\bar{v}_{A21}]_1^\bullet = \bar{a}_{A21} \quad (11)$$

$$[\bar{r}_{BA}]_1^\bullet = \bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA} \quad (12)$$

Potom rovnica pre unášavé zrýchlenie \bar{a}_{B21} je

$$\bar{a}_{B21} = \bar{a}_{A21} + \bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}) \quad (13)$$

Označme číslami v zátvorkách tri sčítance unášavého zrýchlenia \bar{a}_{B21}

$$\bar{a}_{B21} = [\bar{a}_{A21}]_{(1)} + [\bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_{(2)} + [\bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA})]_{(3)} \quad (14)$$

7 Výsledné zrýchlenie bodu pri súčasných pohyboch

Výsledné zrýchlenie V rovnici (8) pre rýchlosti $\bar{v}_{B31} = \bar{v}_{B32} + \bar{v}_{B21}$ v priestore

$\{1\}$ nahradíme unášavú rýchlosť \bar{v}_{B21} rovnicou (1):

$$\bar{v}_{B21} = \bar{v}_{A21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}, \text{ potom}$$

$$\bar{v}_{B31} = \bar{v}_{B32} + \bar{v}_{A21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA} \quad (15)$$

Na získanie výsledného zrýchlenia derivujeme rovnicu (15) podľa času

$$[\bar{v}_{B31}]_1^{\bullet} = [\bar{v}_{B32}]_1^{\bullet} + [\bar{v}_{A21}]_1^{\bullet} + [\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_1^{\bullet} \quad (16)$$

Deriváciou v tom istom priestore získame zrýchlenia

$$[\bar{v}_{B31}]_1^{\bullet} = \bar{a}_{B31} \quad (17)$$

$$[\bar{v}_{A21}]_1^{\bullet} = \bar{a}_{A21} \quad (18)$$

Zrýchlenie \bar{a}_{A21} z rovnice (18) je prvý sčítanec $[\bar{a}_{A21}]_{(1)}$ v rovnici (14) pre unášavé zrýchlenie \bar{a}_{B21} .

Derivácia \bar{v}_{B32} (má súradnice v priestore $\{2\}$) v inom priestore $\{1\}$ je

$$[\bar{v}_{B32}]_1^{\bullet} = [\bar{v}_{B32}]_2^{\bullet} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B32} \quad (19)$$

Deriváciou v tom istom priestore získame zrýchlenie

$$[\bar{v}_{B32}]_2^{\bullet} = \bar{a}_{B32} \quad (20)$$

Derivácia posledného člena v rovnici (16) je

$$[\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_1^{\bullet} = \bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega}_{21} \times [\bar{r}_{B32}]_1^{\bullet} \quad (21)$$

Derivácia \bar{r}_{B32} (má súradnice v priestore $\{2\}$) v inom priestore $\{1\}$ je

$$[\bar{r}_{B32}]_1^{\bullet} = [\bar{r}_{B32}]_2^{\bullet} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{B32} \quad (22)$$

Deriváciou v tom istom priestore získame rýchlosť

$$[\bar{r}_{B32}]_2^{\bullet} = \bar{v}_{B32} \quad (23)$$

Po dosadení (22), (23) do rovnice (21) dostaneme

$$[\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_1^{\bullet} = [\bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_{(2)} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B32} + [\bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA})]_{(3)} \quad (24)$$

Očíslované členy v zátvorkách $[\bar{\alpha}_{21} \times \bar{r}_{BA}]_{(2)}$ a $[\bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BA})]_{(3)}$ sú ďalšie sčítance unášavého

zrýchlenia \bar{a}_{B21} v rovnici (14). Po dosadení (17) - (23) do rovnice (16) dostaneme výsledné zrýchlenie \bar{a}_{B31}

$$\bar{a}_{B31} = \bar{a}_{B32} + \bar{a}_{B21} + 2\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B32} \quad (25)$$

Súčet dvoch členov $\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B32}$ z rovníc (19) a (24) je Coriolisove zrýchlenie bodu B_{31}

$$\bar{a}_{BCOR} = 2\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{B32} \quad (26)$$

Výsledné zrýchlenie \bar{a}_{B31} je potom

$$\bar{a}_{B31} = \bar{a}_{B32} + \bar{a}_{B21} + \bar{a}_{BCOR} \quad (27)$$

súčet lokálne relatívneho \bar{a}_{B32} , unášavého \bar{a}_{B21} a Coriolisovho zrýchlenia \bar{a}_{BCOR} .