doc. Ing. František Palčák, PhD., Ústav aplikovanej mechaniky a mechatroniky,
Strojnícka fakulta STU v Bratislave, www.sjf.stuba.sk

2-25510 Technická mechanika I

9. Prednáška
Kinematika bodu, translačný, rotačný a všeobecný pohyb telesa

Ciele v kinematike. Premiestňovanie súradnicovej sústavy po priestorovej krivke. Priamočiary pohyb bodu. Translačný pohyb a rotačný pohyb telesa. Stred otočenia telesa o konečný uhol, okamžitý stred pootočenia. Riadiace krivky (polódie) všeobecného pohybu telesa. Nahradenie všeobecného pohybu telesa valením polódií a ich využitie v mechanizmoch. Ako Cauchy-Poisson navrhli nahradiť všeobecný rovinný pohyb telesa. Všeobecný vzťah na deriváciu vektora v rôznych priestoroch. Rovnice na výpočet tvaru polódií.

1. Ciele v kinematike.

V Kinematike sa zaoberáme opisom polohy, rýchlosti a zrýchlenia nehmotných a nedeformovateľných útvarov (voľný a viazaný bod, voľné a viazané teleso, sústava viazaných telies) pri nasledovných druhoch pohybu:

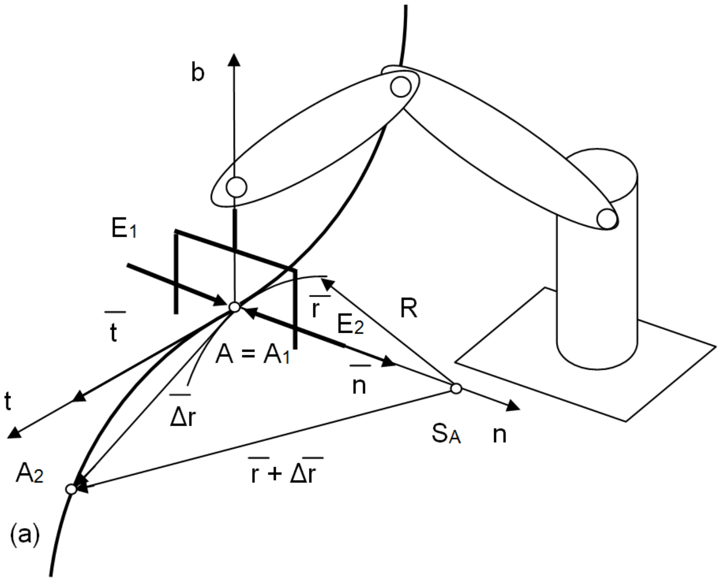
druhy pohybu bodu:
- priamočiary,
- krivočiary: v rovine, v priestore,

druhy pohybu telesa:
- translačný: priamočiary (posuvný), krivočiary,
- rotačný,
- všeobecný v rovine: rozklad
  a) Cauchy-Poisson (translačný (A) + rotačný (okolo A),
  b) súčasné pohyby (unášavý, lokálne relatívny, výsledný)
- sférický,
- všeobecný v priestore: rozklad
  a) Cauchy-Poisson (translačný (A) + sférický (okolo A),
  b) Mozzi-Chasles (skrutkový),

2. Premiestňovanie súradnicovej sústavy s jednotkovými vektormi $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ po priestorovej krivke (a)

Súradnicová sústava $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$

Pri zváraní dverí automobilu treba polohovať zváracie elektródy E_1, E_2 tak, aby sa stred A zváracej hlavice premiestňoval po priestorovej krivke (a), (krivočiary priestorový pohyb bodu A) a aby elektródy E_1, E_2 vždy ležali na hlavnej normále n krivky (a) (obr.1) (všeobecný priestorový pohyb zváracej hlavice).



Obr.1 Súradnicová sústava A ($\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$) zváracej hlavice.

Okamžitá rýchlosť

Okamžitú rýchlosť $\bar{v}$ koncového bodu A polohového vektora $\bar{r}$ môžeme vyjadriť ako limitu

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} = \bar{v}$$

Uvažujme $s = \overleftrightarrow{A_1 A_2}$ ako oblúkovú súradnicu polohy bodu A_2 voči bodu A_1 , potom ds je nekonečne malá veličina $ds = \lim_{\Delta \bar{r} \to 0} \Delta \bar{r}$

okamžitá rýchlosť bude potom

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{t}\, v$$

kde $\bar{t}$ je jednotkový tangenciálny vektor $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}$

vektor $\bar{K}$ krivosti z diferenciánej geometrie

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{K} = K\,\bar{n}\,, \quad \bar{K} = \frac{1}{R}\bar{n}$$

kde R je polomer oskulačnej kružnice, ktorá nahrádza dráhu (a) v okolí normály dráhy (a) bodu A. Stred krivosti S_A nekruhovej dráhy (a) bodu A pri všeobecnom pohybe telesa je stred oskulačnej kružnice.

Okamžité zrýchlenie

Okamžité zrýchlenie koncového bodu A polohového vektora $\bar{r}$ je

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\bar{t})}{dt} = \ddot{s}\,\bar{t} + \dot{s}\frac{d\bar{t}}{dt} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$$

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{K}\,\dot{s} = \frac{1}{R}\bar{n}\,\dot{s}\,, \quad \bar{a}_t = \ddot{s}\,\bar{t}\,, \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\bar{n}$$

Vo všeobecnosti pre krivočiaru dráhu koncového bodu A polohového vektora $\bar{r}$ platí $\bar{a} \neq \frac{dv}{dt} = a_t$ (obr.5).

Pre tangenciálne zrýchlenie bodu na priamočiarej dráhe platí

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d(v^2)}{2ds}, \quad a_t ds = v\, dv$$

3. Priamočiary pohyb bodu telesa

Príklad.

V čase $t = 0$ sa automobil na obr.2 rozbieha z nulovej rýchlosti $v = v_0$ konštantným zrýchlením $a = a_c$ (priamočiary rovnomerne zrýchlený pohyb bodu T_0). Integráciou vzťahu $a_c = \frac{dv}{dt}$ treba získať rovnicu pre výpočet rýchlosti a dráhy v čase t.

Riešenie:

Pre okrajové podmienky

$t = 0$, $v = v_0$, $s = s_0$

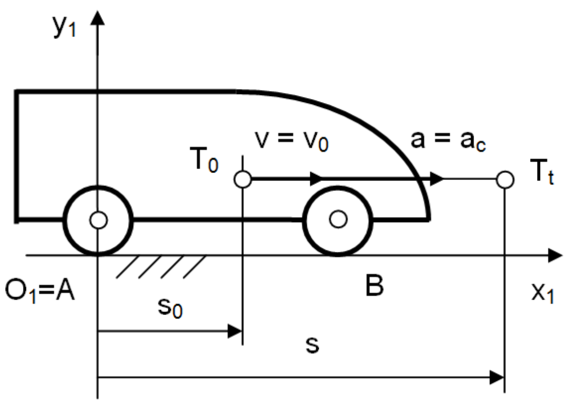
bude

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_c \int_0^t dt \;, v - v_0 = a_c (t - t_0) ,$$

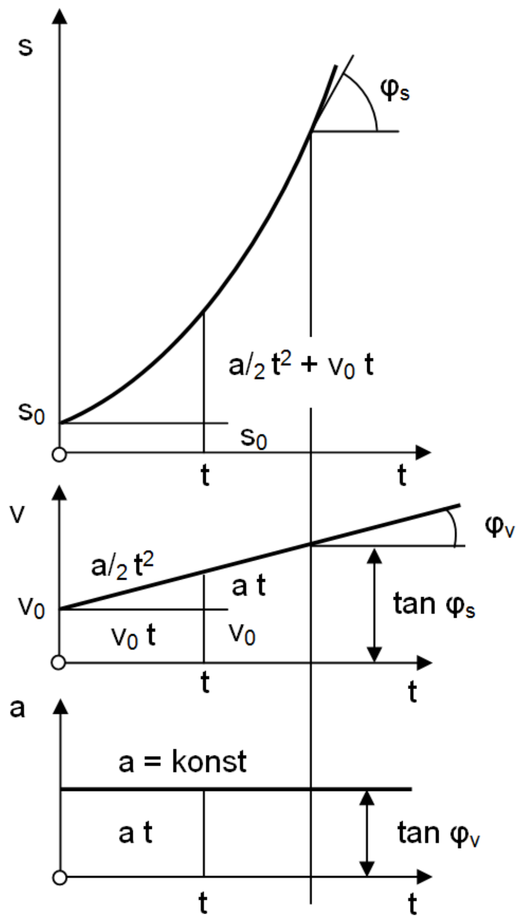
$$v = v_0 + a_c t$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt \;,$$

$$s = s_0 + v_0 t + 0.5 a_c t^2$$



Obr. 2 Priamočiary pohyb bodu T_0

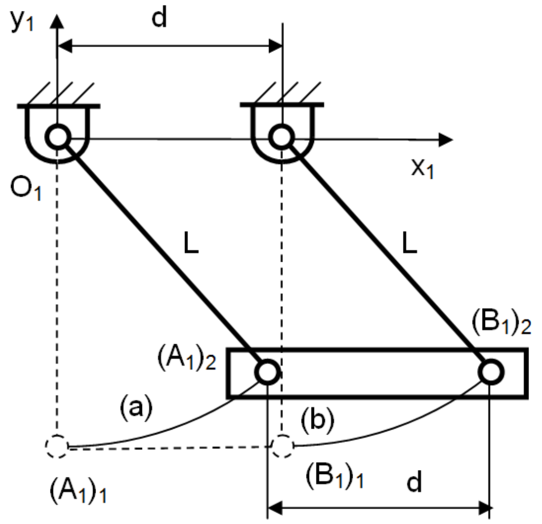


Obr.3 priebehy dráhy, rýchlosti a zrýchlenia

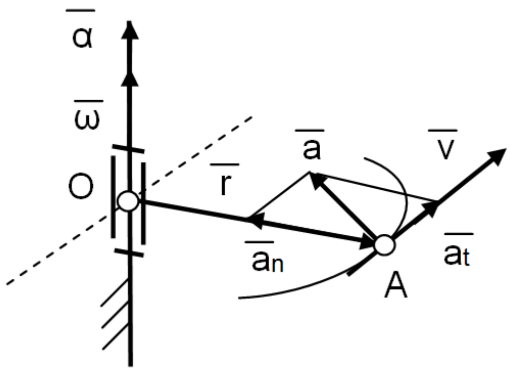
4. Translačný pohyb telesa

Translačný pohyb

Translačný pohyb telesa (priamočiary pohyb automobilu na obr.2 aj krivočiary pohyb hojdačky na obr.4) môžeme reprezentovať jedným bodom, lebo všetky body majú rovnaký tvar dráhy, rovnakú okamžitú rýchlosť aj rovnaké okamžité zrýchlenie.



Obr.4 Translačný krivočiary pohyb telesa AB

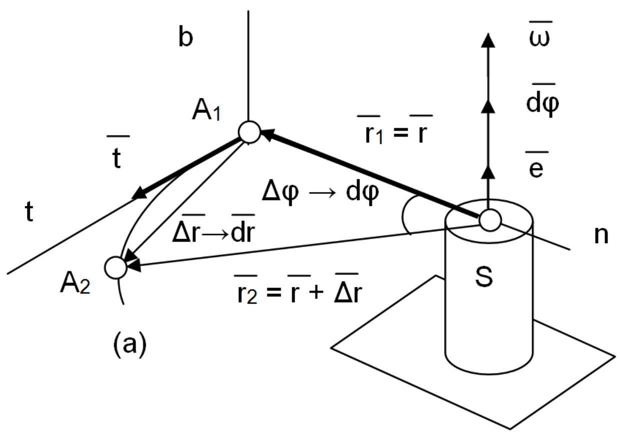


Obr. 5 Rotačný pohyb sprievodiča

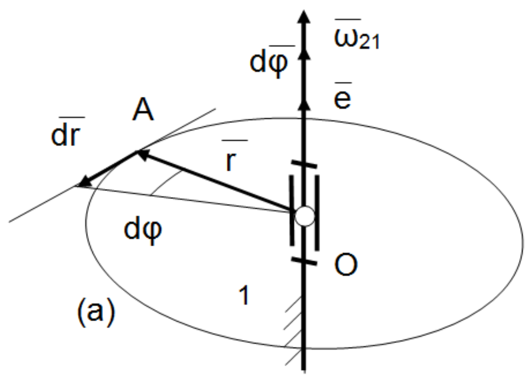
5. Rotačný pohyb telesa

Rotačný pohyb

Nech sa polohový vektor $\overline{r}$, ktorý na obr.6 predstavuje rameno zváracieho robota pootočí z východiskovej polohy $\overline{r}_1$ do konečnej polohy $\overline{r}_2$ okolo kolmej osi s jednotkovým vektorom $\overline{e}$.
Dráha koncového bodu A sprievodiča $\overline{r}$ je kružnica (a), pričom $|\overline{r}_1| = r$ a $|\overline{r}_2| = r$.



Obr.6 Pootočenie ramena o konečný uhol $\Delta\varphi$.



Obr.7 Pootočenie ramena o nekonečne malý uhol $d\varphi$

Ak zmenšíme konečný uhol $\Delta\varphi$ pootočenia polohového vektora $\overline{\mathrm{r}}$ na nekonečne malú hodnotu $\mathrm{d}\varphi$ (obr.7), potom nositeľka vektora $\mathrm{d}\overline{\mathrm{r}}$ bude dotyčniva t kolmá na hlavnú normálu n ktorá je nositeľkou polohového vektora $\overline{\mathrm{r}}$.

Orientovaný uhol $\mathrm{d}\overline{\varphi}$ s veľkosťou $\mathrm{d}\varphi$ uhla pootočenia je kolmý na polohový vektor $\overline{\mathrm{r}}$.

Obvodová rýchlosť

Podľa pravidiel vektorového súčinu je

$$\mathrm{d}\overline{\mathrm{r}} = \mathrm{d}\overline{\varphi} \times \overline{\mathrm{r}} \tag{1}$$

Nakoľko nekonečne malé veličiny $\mathrm{d}\overline{\mathrm{r}}$ a $\mathrm{d}\overline{\varphi}$ sa za nekonečne malý čas dt zmenia ale konečná veličina $\overline{\mathrm{r}}$ sa za nekonečne malý čas dt nezmení, potom dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}}{\mathrm{dt}} \times \overline{\mathrm{r}} \tag{2}$$

Ľavá strana rovnice (2) je vektor $\overline{\mathrm{v}}$ okamžitej rýchlosti koncového bodu A sprievodiča na obr. 7 a nekonečne malá časová zmena orientovaného uhla $\mathrm{d}\overline{\varphi}$ je vektor $\overline{\omega}$ okamžitej uhlovej rýchlosti rotácie polohového vektora $\overline{\mathrm{r}}$, teda

$$\overline{\mathrm{v}} = \overline{\omega} \times \overline{\mathrm{r}} \tag{3}$$

Rovnicu (3) pre výpočet vektora $\overline{\mathrm{v}}$ okamžitej rýchlosti koncového bodu A sprievodiča $\overline{\mathrm{r}}$ odvodil Euler.

Zrýchlenie

Vektor $\overline{\mathrm{a}}$ okamžitého zrýchlenia koncového bodu A sprievodiča $\overline{\mathrm{r}}$ získame deriváciou vektorového súčinu v rovnici (3)

$$\overline{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\overline{\omega} \times \overline{\mathrm{r}})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{dt}} \times \overline{\mathrm{r}} + \overline{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} \tag{4}$$

Označme $\overline{\alpha}$ vektor okamžitého uhlového zrýchlenia rotácie polohového vektora $\overline{\mathrm{r}}$, potom

$$\overline{\mathrm{a}} = \overline{\alpha} \times \overline{\mathrm{r}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathrm{v}} \tag{5}$$

Prvý člen v rovnici (5) vyjadríme v tvare

$$\overline{\alpha} \times \overline{\mathrm{r}} = \alpha \overline{\mathrm{e}} \times \overline{\mathrm{r}} = \alpha \mathrm{r} \overline{\mathrm{t}} = \mathrm{a}_{\mathrm{t}} \overline{\mathrm{t}} \tag{6}$$

Ak v druhom člene rovnice (5) za $\overline{\mathrm{v}}$ dosadíme z rovnice (3) dostávame dvojnásobný vektorový súčin

$$\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{\mathrm{r}}) = \overline{\omega}(\overline{\omega}.\overline{\mathrm{r}}) - \overline{\mathrm{r}}\,(\overline{\omega}.\overline{\omega}) = -\overline{\mathrm{r}}\omega^2 = \mathrm{r}\omega^2 \overline{\mathrm{n}} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}} \overline{\mathrm{n}} \tag{7}$$

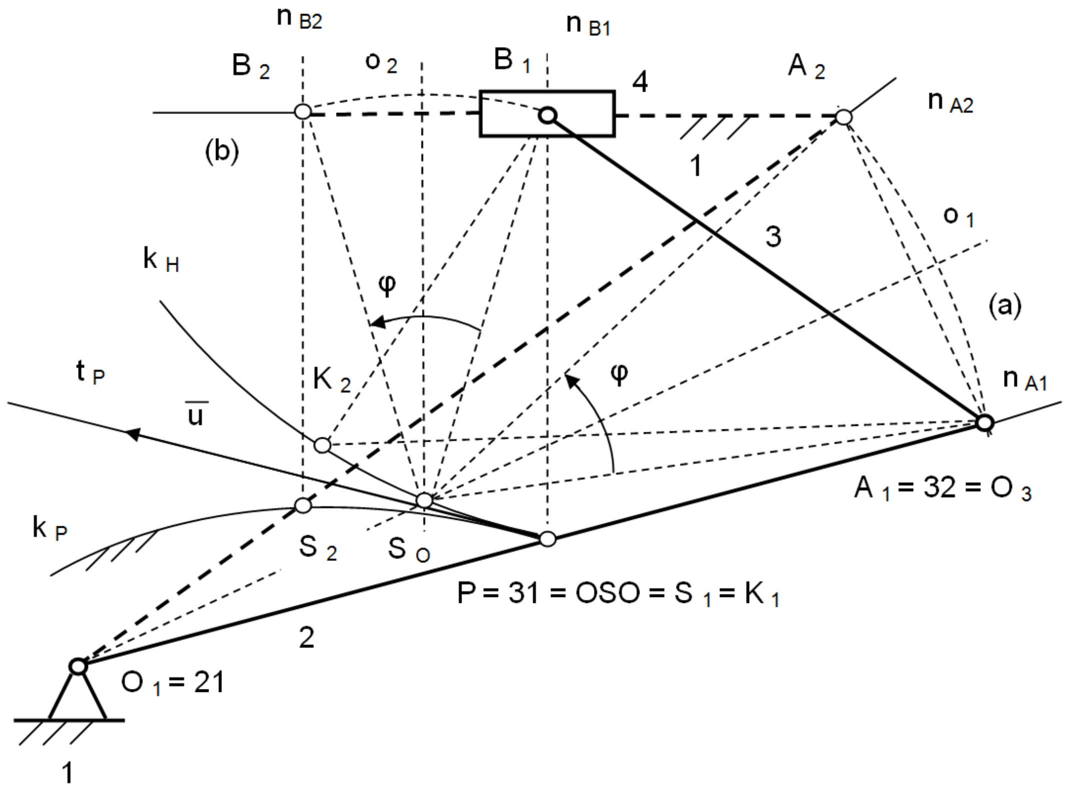
Po dosadení (6), (7) do rovnice (5) dostaneme vektor $\overline{\mathrm{a}} = \overline{\alpha} \times \overline{\mathrm{r}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathrm{v}}$ okamžitého uhlového zrýchlenia rotácie polohového vektora $\overline{\mathrm{r}}$

$$\overline{\mathrm{a}} = \alpha \mathrm{r} \overline{\mathrm{t}} + \mathrm{r}\omega^2 \overline{\mathrm{n}} \tag{8}$$

6. Stred otočenia telesa o konečný uhol, okamžitý stred pootočenia

Druhy pohybov

Vstupný hnací člen 2 (kľuka) na obr.8 v kľukovom mechanizme koná voči rámu 1 rotačný pohyb 2/1, piest 4 koná voči rámu posuvný pohyb 4/1, a spojovací člen 3 (ojnica) koná voči rámu všeobecný pohyb 3/1 (nie je to ani rotácia ani posuvný pohyb).



Obr.8 Kľukový mechanizmus vo východiskovej polohe ($O_1A_1B_1$) a konečnej polohe ($O_1A_2B_2$).

Konečný uhol pootočenia

Pohyblivú rovinu so spojovacím členom $\overrightarrow{AB}$ môžeme otočiť z východiskovej polohy $\overrightarrow{A_1B_1}$ do konečnej polohy $\overrightarrow{A_2B_2}$ okolo stredu otočenia $S_o = o_1 \times o_2$ (priesečník osí úsečiek) s konečným uhlom $\varphi = \sphericalangle(A_1S_oA_2) = \sphericalangle(B_1S_oB_2)$.

Okamžitý stred otočenia

Ak zmenšíme konečný uhol φ otočenia na nekonečne malý uhol $d\varphi$, potom rovina so spojovacím členom $\overrightarrow{AB}$ sa premiestni z východiskovej polohy $\overrightarrow{A_1B_1}$ do nekonečne blízkej polohy pootočením okolo priesečníka S_1 normál n_{A1}, n_{B1} k dráham (a), (b) bodov A, B, $S_1 = n_{A1} \times n_{B1}$.

Priesečník S_1, ktorý je bodom z nepohyblivej roviny rámu 1, sa prekrýva s bodom K_1 zo spojovacieho člena 3, ktorý má v tejto polohe nulovú okamžitú rýchlosť voči 1 a nazývame ho okamžitý stred otočenia $S_1 = (OSO_{31})_1 = 31 = K_1$ spojovacieho člena 3 do nekonečne blízkej polohy. Ak je spojovací člen mechanizmu v polohe $\overrightarrow{A_2B_2}$, potom príslušný priesečník $S_2 = (OSO_{31})_2 = n_{A2} \times n_{B2}$ je nový okamžitý stred otočenia S_2 spojovacieho člena 3 do nekonečne blízkej polohy.

7. Riadiace krivky (polódie) všeobecného pohybu telesa

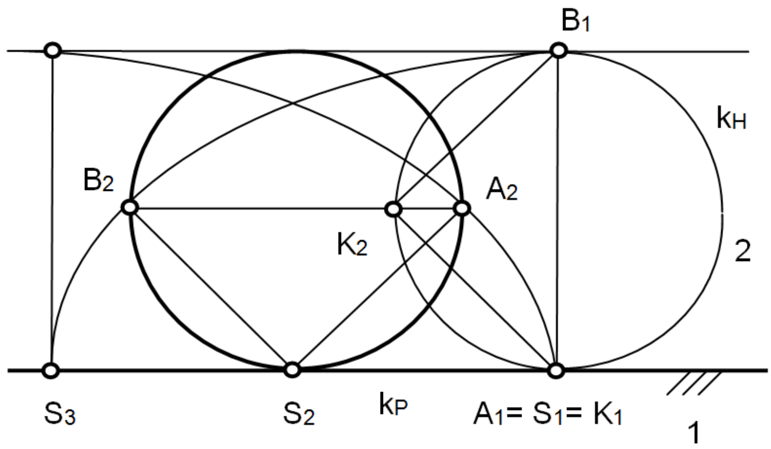
Nepohyblivá polódia	Spojnicu okamžitých stredov otáčania $\{S_i\}$ pri všeobecnom pohybe 3/1 spojovacieho člena 3 voči rámu 1 zakreslenú v nepohyblivej rovine nazývame nepohyblivá polódia k_P.
Pohyblivá polódia	Keď trojuholník $\Delta(A_2B_2S_2)$ s úsečkou $\overrightarrow{A_2B_2}$ na obr.8 premiestnime do východiskovej polohy úsečky $\overrightarrow{A_1B_1}$, na mieste pôvodného bodu S_2 dostaneme bod K_2, ktorý je bodom pohyblivej roviny spojovacieho člena 3 (ojnice) a spojnicu bodov $\{K_i\}$, ktoré získame zovšeobecnením premiestňovania trojuholníkov $\Delta(A_iB_iS_i) \rightarrow \Delta(A_1B_1K_i)$ nazveme pohyblivá polódia k_H, ktorá je súčasťou spojovacieho člena 3.
Riadiace krivky	Všeobecný pohyb 3/1 spojovacieho člena 3 voči rámu 1 môžeme nahradiť valením pohyblivej polódie k_H, ktorá je súčasťou spojovacieho člena 3 po nepohyblivej polódii k_P (riadiace krivky všeobecného pohybu 3/1 spojovacieho člena 3 voči rámu 1).
Rýchlosť $\bar{u}$	Dotyčnica t_P polódií k_P a k_H je nositeľka okamžitej rýchlosti $\bar{u}$ premiestňovania dotykových bodov S a K po polódiách, pričom dotykový bod S nie je bodom nepohyblivej roviny rámu 1 a dotykový bod K nie je bodom pohyblivej roviny spojovacieh člena 3.
Stred krivosti dráhy	Stred krivosti S_A nekruhovej dráhy (a) bodu A pri všeobecnom pohybe telesa je stred oskulačnej kružnice, ktorá nahrádza dráhu (a) v okolí normály dráhy (a) bodu A, pričom stred krivosti dráhy nie je zhodný s okamžitým stredom otáčania $S_A \neq OSO$.

Keď je dráha bodu (a) kružnica, potom stred S_A krivosti dráhy (a) je totožný so stredom tejto kružnice aj s okamžitým stredom otáčania OSO.
Keď je dráha bodu (a) priamka, potom stred S_A krivosti dráhy (a) je nevlastný bod na normále, ako aj okamžitý stred otáčania OSO.

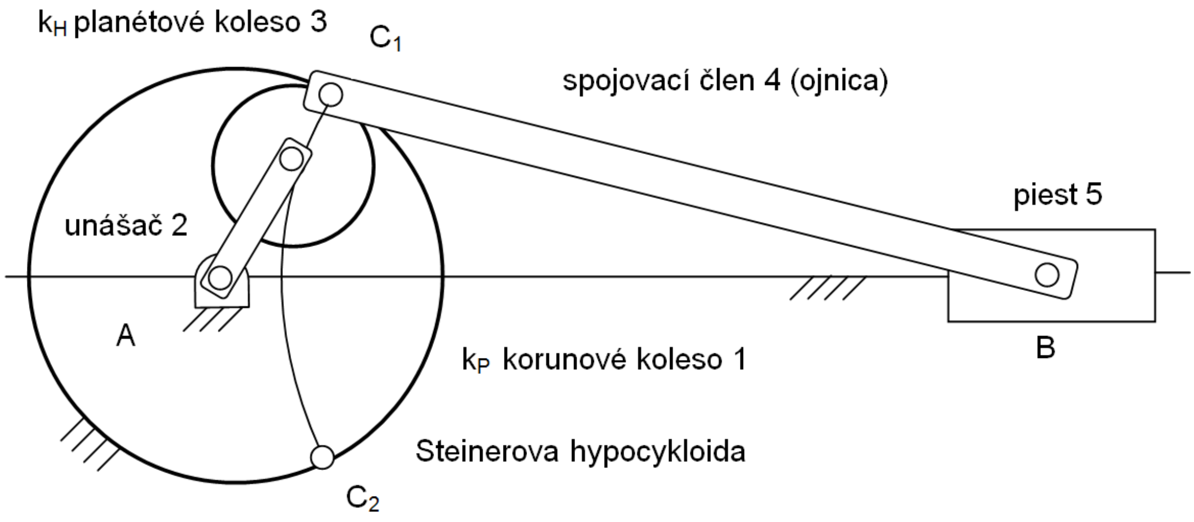
8. Využitie riadiacich kriviek v mechanizmoch

Využitie valenia pohyblivej polódie po (nepohyblivej) pevnej polódii v praxi.

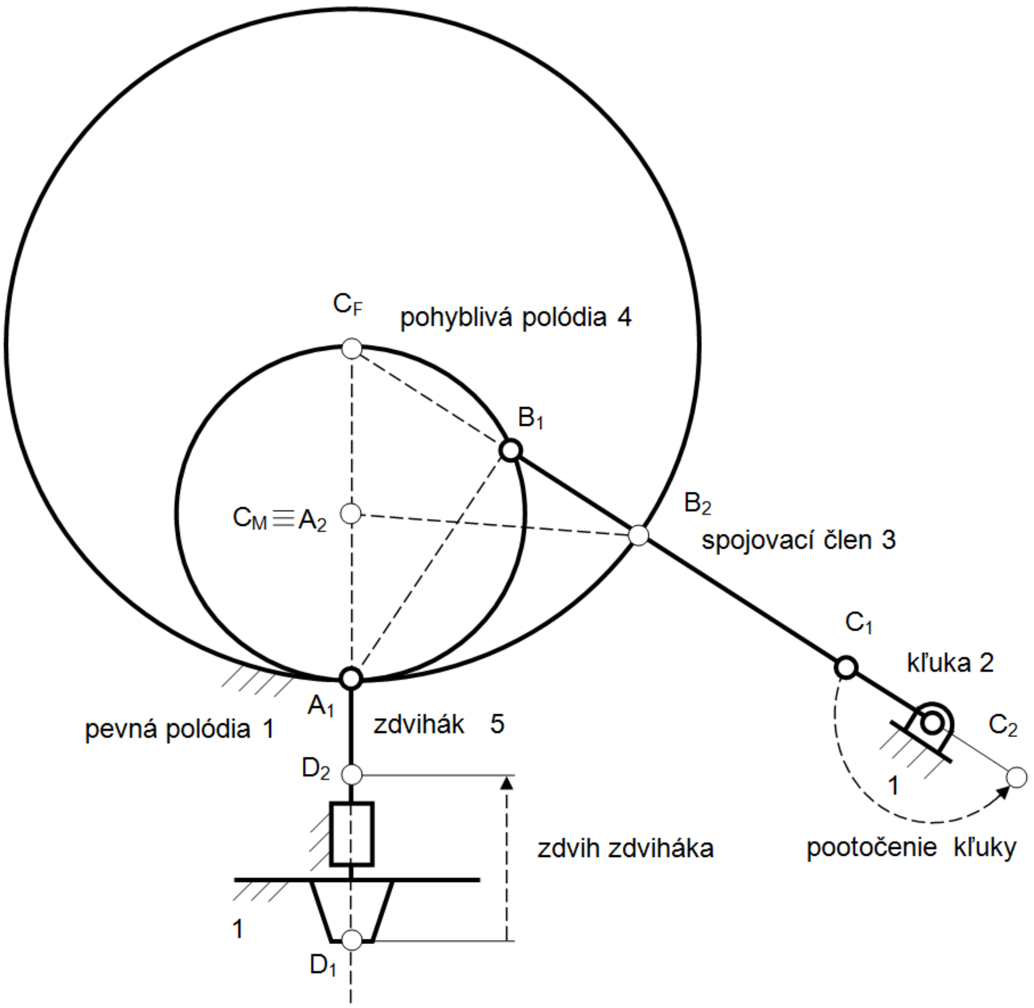
Ortocykloida — pohyblivá polódia: pastorok, pevná polódia: ozubený hrebeň



Obr. 9 Valenie kolesa (pohyblivej polódie k_H) po ceste (nepohybivá polódia k_P), dráha bodu kolesa pri valení: ortocykloida.



Obr. 10 Mechanizmus s výdržou, odvaľovanie planétového kolesa (pohyblivej polódie k_H) po korunovom kolese (nepohybivá polódia k_P).



Obr.10 Mechanizmus presného uzatváracieho ventila

9. Ako Cauchy-Poisson navrhli nahradiť všeobecný rovinný pohyb telesa fiktívnym posunutím a fiktívnym pootočením.

Poloha

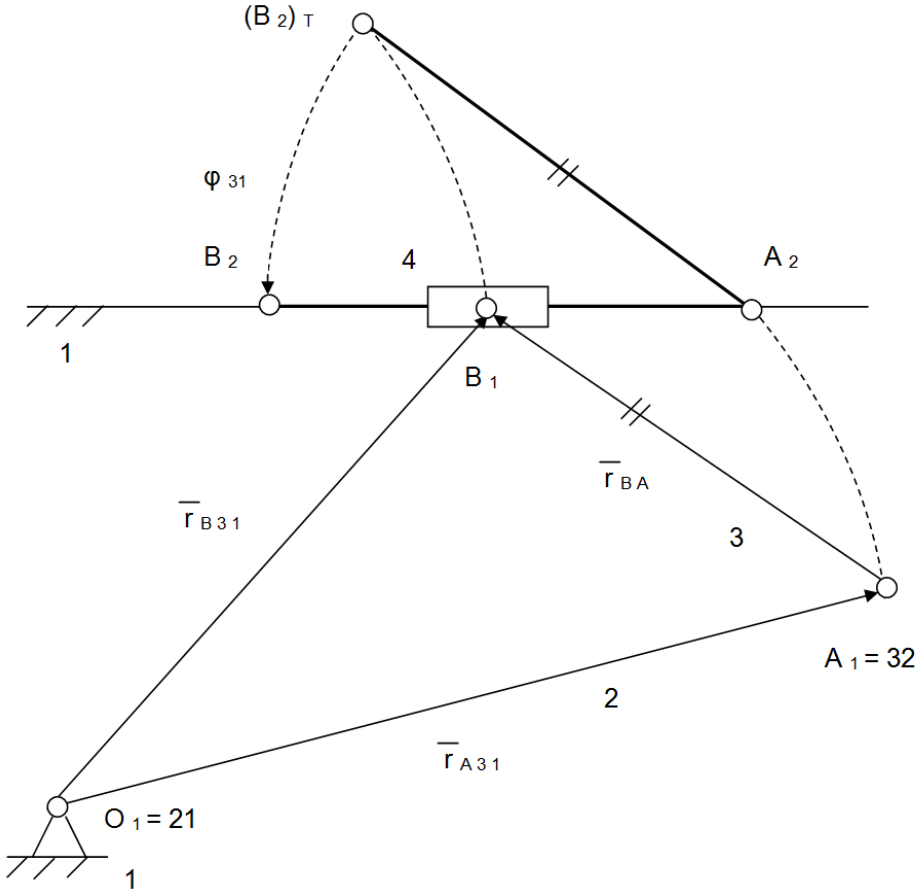
Polohový vektor $\overline{r}_{B31}$ bodu B_1 zo spojovacieho člena 3 voči rámu 1 môžeme zapísať ako súčet

$$\overline{r}_{B31} = \overline{r}_{A31} + \overline{r}_{BA} \qquad (1)$$

Rýchlosť

Vo všeobecnosti platí, že časová derivácia polohového vektora so súradnicami v priestore $\{a\}$, v tom istom priestore $\{a\}$, je vektor okamžitej rýchlosti so súradnicami v tom istom priestore $\{a\}$.

V rovnici (1): $\overline{r}_{B31} = \overline{r}_{A31} + \overline{r}_{BA31}$ majú všetky vektory súradnice v priestore 1.



Obr.11 Zobrazenie nahradenia všeobecného rovinného pohybu telesa fiktívnym posunutím a fiktívnym pootočením.

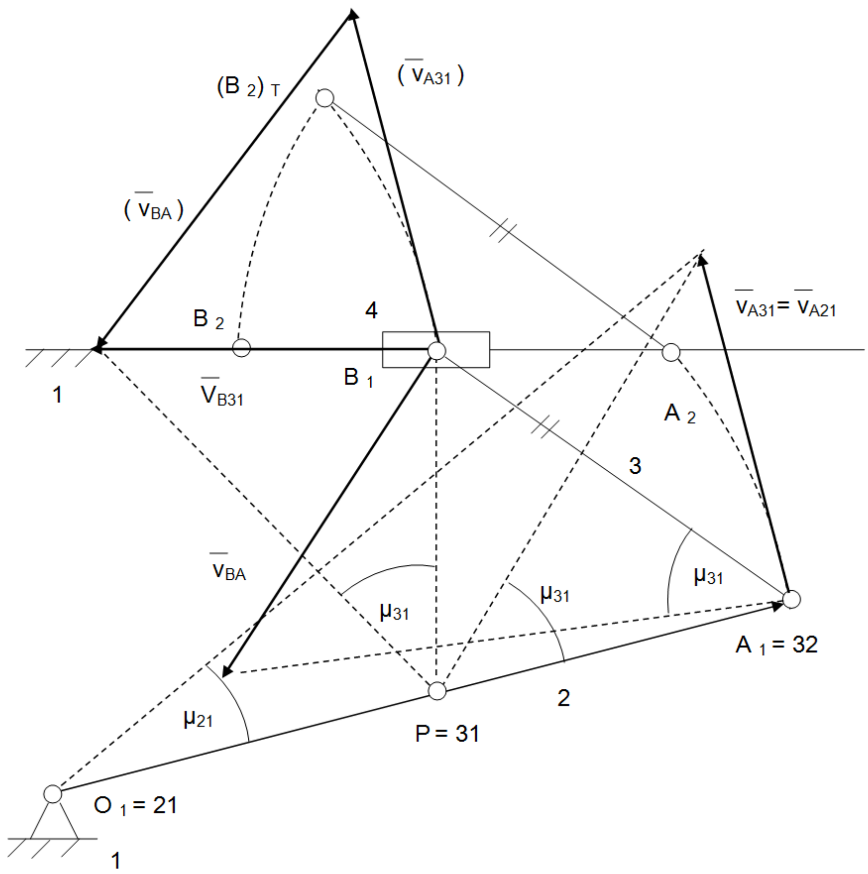
Deriváciou rovnice (1) $[\bar{r}_{B31}]_1^{\bullet} = [\vec{r}_{A31}]_1^{\bullet} + [\vec{r}_{BA31}]_1^{\bullet}$ získame rovnicu (2) pre okamžité rýchlosti

$$\bar{v}_{B31} = \bar{v}_{A31} + \bar{v}_{BA31} \tag{2}$$

Rovnicu (2) navrhli Cauchy (1827) a Poisson (1834) na nahradenie všeobecného rovinného pohybu 3/1 telesa 3 vzhľadom na rám 1 fiktívnym posunutím ktoré reprezentuje zvolený vzťažný bod A z úsečky $\overrightarrow{AB}$, ktorá sa premiestni z východiskovej polohy $\overrightarrow{A_1B_1}$ do prechodnej polohy $\overrightarrow{A_2(B_2)_T}$ a do konečnej polohy $\overrightarrow{A_2B_2}$ sa premiestni fiktívnym pootočením okolo vzťažného bodu A.
Časová derivácia polohového vektora $\bar{r}_{BA}$ so súradnicami v priestore $\{3\}$ je odľa Eulera okamžitá obvodová rýchlosť

$$\bar{v}_{BA31} = \bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{BA} \tag{3}$$

bodu B vzhľadom na bod A pri fiktívnej rotácii úsečky $\overrightarrow{A_2(B_2)_T}$ okolo vzťažného bodu A v polohe A_2.



Obr.12 Znázornenie vektorovej rovnice $\overline{v}_{B31} = \overline{v}_{A31} + \overline{v}_{BA31}$.

Grafická konštrukcia — Pre danú rýchlosť $\overline{v}_{A31}$ zostrojíme rýchlosť $\overline{v}_{B31} = \overline{v}_{A31} + \overline{v}_{BA31}$ (obr.12).

Zrýchlenie — Zrýchlenie $\overline{a}_{B31}$ bodu B_1 získame deriváciou podľa času

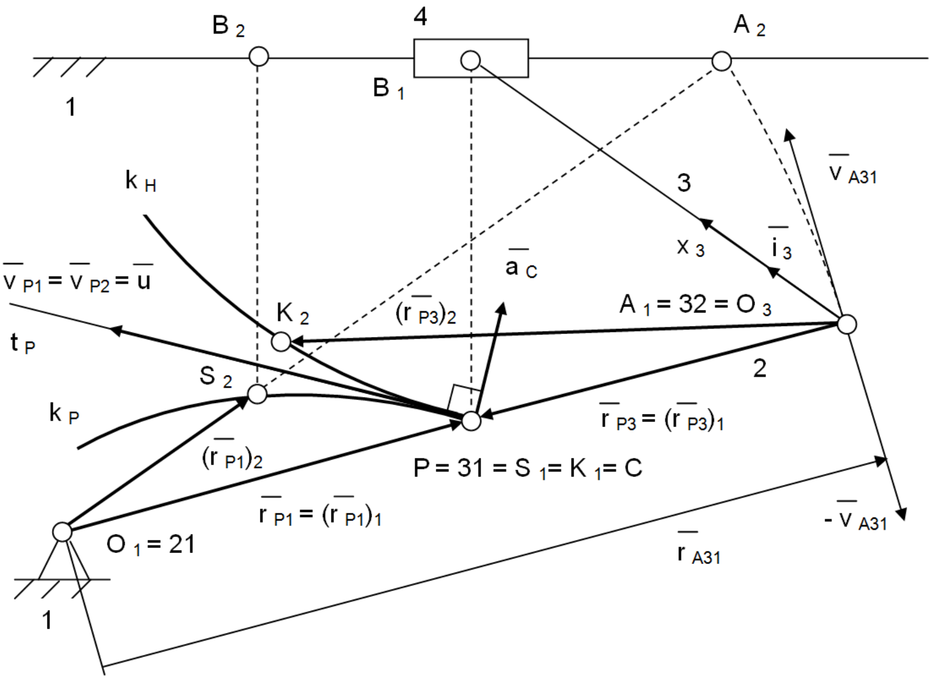
$$[\overline{v}_{B31}]_1^{\bullet} = [\overline{v}_{A31}]_1^{\bullet} + \frac{d}{dt}(\overline{\omega}_{31} \times \overline{r}_{BA})$$

$$\overline{a}_{B31} = \overline{a}_{A31} + \overline{\alpha}_{31} \times \overline{r}_{BA} + \overline{\omega}_{31} \times \overline{v}_{BA} \qquad (4)$$

10. Všeobecný vzťah na deriváciu vektora v rôznych priestoroch.

Poloha pólu P — Spojovací člen 3 kľukového mechanizmu na obr.13 koná vzhľadom na rám 1 všeobecný pohyb 3/1. V okamžitej polohe $\overrightarrow{A_1B_1}$ bod C zo spojovacieho člena 3, $C \in 3$ je na rovnakom mieste ako okamžitý stred otáčania $C \equiv 31$ a preto má nulovú okamžitú rýchlosť $\overline{v}_{C31} = \overline{0}$. Polohový vektor pólu P (okamžitého stredu otočenia) voči začiatku O_1 globálnej súradnicovej sústavy telesa 1 je daný súčtom

$$\bar{r}_{P1} = \bar{r}_{A31} + \bar{r}_{P3} \tag{1}$$



Obr.13 Kľukový mechanizmus s pevnou polódiou k_P a pohyblivou polódiou k_H. Polohový vektor $(\bar{r}_{P1})_1$ určuje začiatočnú polohu $P \equiv S_1$ voči O_1, a $(\bar{r}_{P1})_2$ odpovedá konečnej polohe $\overrightarrow{A_2B_2}$ spojovacieho člena 3.

Rýchlosť pólu P

Na získanie okamžitej rýchlosti premiestňovania pólu P pozdĺž pevnej polódie k_P a pohyblivej k_H polódie je potrebné derivovať rovnicu (1) v priestore $\{1\}$:

$$[\bar{r}_{P1}]_1^{\bullet} = [\bar{r}_{A31}]_1^{\bullet} + [\bar{r}_{P3}]_1^{\bullet} \tag{2}$$

Polohový vektor $\bar{r}_{P3}$ má súradnice v priestore $\{3\}$

$$\bar{r}_{P3} = (\bar{r}_{P3} \cdot \bar{i}_3)\bar{i}_3 + (\bar{r}_{P3} \cdot \bar{j}_3)\bar{j}_3 \tag{3}$$

Preto derivácia $[\bar{r}_{P3}]_1^{\bullet}$ polohového vektora $\bar{r}_{P3}$ v inom priestore $\{1\}$ vyžaduje aby sme odvodili všeobecný vzťah na deriváciu vektora v rôznych priestoroch. Označme

$$r_{P3x} = \bar{r}_{P3} \cdot \bar{i}_3 \tag{4}$$

$$r_{P3y} = \bar{r}_{P3} \cdot \bar{j}_3 \tag{5}$$

súradnice vektora $\bar{r}_{P3}$. Derivácie súradníc r_{P3x} a r_{P3y} polohového vektora $\bar{r}_{P3}$ (ako súčin) budú súradnice v_{P3x}, and v_{P3y} okamžitej rýchlosti $\bar{v}_{P3}$ bodu P

$$v_{P3x} = \frac{d}{dt} r_{P3x} \tag{6}$$

$$v_{P3y} = \frac{d}{dt} r_{P3y} \tag{7}$$

potom

$$\left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{1} = \left(\frac{d}{dt} r_{P3x}\right)\bar{i}_3 + r_{P3x}\frac{d\bar{i}_3}{dt} + \left(\frac{d}{dt} r_{P3y}\right)\bar{j}_3 + r_{P3y}\frac{d\bar{j}_3}{dt} \tag{8}$$

Derivácia jednotkových vektorov $\bar{i}_3$ a $\bar{j}_3$ rotujúcich uhlovou rýchlosťou $\bar{\omega}_{31}$ je vektorový súčin

$$\frac{d\bar{i}_3}{dt} = \bar{\omega}_{31} \times \bar{i}_3 \tag{9}$$

resp.

$$\frac{d\bar{j}_3}{dt} = \bar{\omega}_{31} \times \bar{j}_3 \tag{10}$$

Potom môžeme písať rovnicu (8) v tvare

$$\left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{1} = \left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{3} + \bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{P3} \tag{11}$$

nakoľko

$$\left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{3} = \bar{v}_{P3} \tag{12}$$

a ako vidíme z obr.12

$$\bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{P3} = -\bar{v}_{A31} \tag{13}$$

Po dosadení (13) do (2) získame rovnicu pre vektor okamžitej rýchlosti

$$\bar{v}_{P1} = \bar{v}_{A31} + \bar{v}_{P3} - \bar{v}_{A31} \tag{14}$$

z ktorej vyplýva, že rýchlosti $\bar{v}_{P1}$, resp. $\bar{v}_{P3}$ premiestňovania dotykového bodu P pozdĺž polódií sú v priestore $\{1\}$ rovnaké.

$$\bar{v}_{P1} = \bar{v}_{P3} = \bar{u} \tag{15}$$

Nositeľka okamžitej rýchlosti $\bar{u}$ je dotyčnica t_P k polódiám k_P a k_H.

Zovšeobecnenie

Všeobecný vzťah pre deriváciu vektora $\bar{r}_{Pa}$ v inom priestore $\{b\}$ ako je priestor $\{a\}$ v ktorom má vyjadrené súradnice zovšeobecníme podľa vzťahu (11) $\left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{1} = \left[\bar{r}_{P3}\right]^{\bullet}_{3} + \bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{P3}$ do tvaru

$$\left[\bar{r}_{Pa}\right]^{\bullet}_{b} = \left[\bar{r}_{Pa}\right]^{\bullet}_{a} + \bar{\omega}_{ab} \times \bar{r}_{Pa} \tag{16}$$

kde deriváciu vektora $\bar{r}_{Pa}$ v priestore $\{b\}$ vyjadríme ako súčet derivácie vektora $\bar{r}_{Pa}$ v priestore $\{a\}$ v ktorom má vyjadrené súradnice a vektorového súčinu vzájomnej uhlovej rýchlosti priestorov $\{a\},\{b\}$ s vektorom $\bar{r}_{Pa}$ so súradnicami v priestore $\{a\}$.

11. Rovnice na výpočet tvaru pohyblivej k_H a pevnej k_P polódie

Rovnice k_P, k_H

Využime rovnicu $\bar{v}_{B31} = \bar{v}_{A31} + \bar{v}_{BA31}$ podľa toho ako Cauchy a Poisson navrhli nahradiť všeobecný pohyb 3/1 teraz pre bod $C \in 3$:

$$\bar{v}_{C31} = \bar{v}_{A31} + \bar{v}_{CA31} \tag{17}$$

Vzhľadom na $C \equiv 31$ je okamžitá rýchlosť

$$\bar{v}_{C31} = \bar{0} \tag{18}$$

a obvodvá rýchlosť $\bar{v}_{CA31}$ podľa Eulera pri fiktívnej rotácii $\bar{r}_{P3}$ okolo vzťažného bodu A bude

$$\bar{v}_{CA31} = \bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{P3} \tag{19}$$

Ak vynásobíme vektorove rovnicu (17) $\bar{\omega}_{31}$ zľava

$$\bar{0} = \bar{\omega}_{31} \times \bar{v}_{A31} + \bar{\omega}_{31} \times (\bar{\omega}_{31} \times \bar{r}_{P3}) \tag{20}$$

po úprave dvojnásobného vektorového súčinu dostaneme vektor $\bar{r}_{P3}$

$$\bar{r}_{P3} = \frac{\bar{\omega}_{31} \times \bar{v}_{A31}}{\omega_{31}^{\ 2}} \tag{21}$$

Ak budú mať všetky vektory v rovnici (21) súradnice v priestore $\{3\}$, potom spojnica koncových bodov vektora $\bar{r}_{P3}$ je pohyblivá polódia k_H (obr.13) a rovnica (21) v maticovom zápise vektorového súčinu je rovnicou pohyblivej polódie k_H:

$$\bar{r}_{P3} = \frac{1}{\omega_{31}^{\ 2}} \begin{vmatrix} \bar{i}_3 & \bar{j}_3 & \bar{k}_3 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}_{31}.\bar{k}_3 \\ \bar{v}_{A31}.\bar{i}_3 & \bar{v}_{A31}.\bar{j}_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{22}$$

Ak dosadíme vektor $\bar{r}_{P3}$ z rovnice (21) do rovnice $\bar{r}_{P1} = \bar{r}_{A31} + \bar{r}_{P3}$ a všetky vekory budú mať súradnice v priestore$\{1\}$

$$\bar{r}_{P1} = \bar{r}_{A31} + \frac{1}{\omega_{31}^{\ 2}} \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}_{31}.\bar{k}_1 \\ \bar{v}_{A31}.\bar{i}_1 & \bar{v}_{A31}.\bar{j}_1 & 0 \end{vmatrix} \tag{23}$$

potom spojnica koncových bodov vektora $\bar{r}_{P1}$ (obr.13) je pevná polódia k_P a rovnica (23) je rovnicou pevnej polódie k_P.