

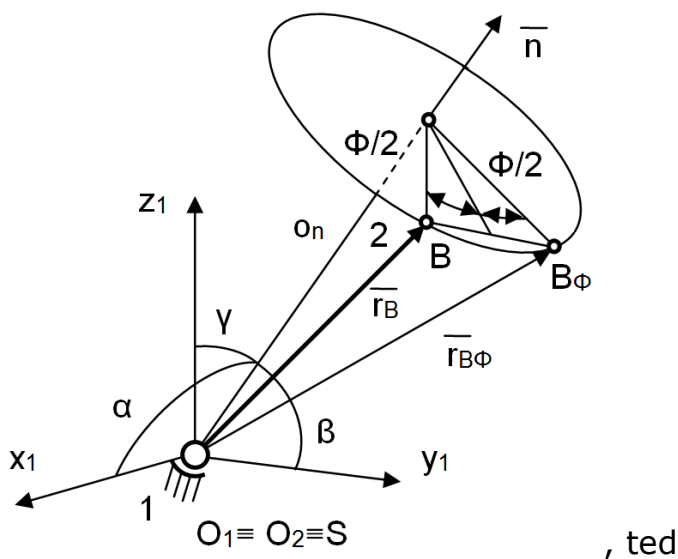
## 2-25510 Technická mechanika I

### 11. Prednáška Kinematika sférického pohybu telesa

Eulerove parametre. Točivé a stredové zrýchlenie bodu telesa pri sférickom pohybe telesa. Eulerove uhly pre precesiu, nutáciu a lokálnu rotáciu. Eulerove kinematické rovnice.

#### 1. Eulerove parametre

Eulerove parametre Sféricky uložená páčka 2 voči rámu 1 ( $O_1 \equiv O_2 \equiv S$ ) na obr.1 má podľa vzťahu  $n_t = n_v - t$  lokálnu pohyblivosť  $n_3 = 6 - 3 = 3$ , teda na určenie jej polohy treba zadať 3 nezávislé súradnice polohy. Na premiestnenie páčky 2 voči rámu 1 z danej východiskovej polohy  $\vec{r}_B$  do konečnej polohy  $\vec{r}_{B\Phi}$  okolo osi  $o_n$  ktorej poloha v priestore je daná smerovými uhlami  $(\alpha, \beta, \gamma)$  teda môžeme zadať dva smerové uhly (tretí smerový uhol je viazaný podmienkou  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ) a konečný (merateľný) uhol  $\Phi$ .



Obr.1 Východisková poloha  $\vec{r}_B$  a konečná poloha  $\vec{r}_{B\Phi}$  koncového bodu B polohového vektora  $\vec{r}_B$  pri sférickom pohybe páčky 2 voči rámu 1 ( $O_1 \equiv O_2 \equiv S$ ).

Kvaternión  $\hat{e}_{ab}$

Otočenie páčky 2 voči rámu 1 zapíšeme kvaterniónom

$$\hat{e}_{12} = e_0 + e_1 \bar{i}_1 + e_2 \bar{j}_1 + e_3 \bar{k}_1 \quad (1)$$

kde  $e_0, e_1, e_2, e_3$  nazývame Eulerove parametre. Os  $o_n$  prechádza stredom S sférického pohybu a je nositeľkou jednotkového vektora  $\bar{n}$ .

Kvaternión  $\hat{e}_{12}$  môžeme zapísať ako súčet:

$$\hat{e}_{12} = e_0 + \bar{e} = \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Phi}{2} \bar{n} \quad (2)$$

kde  $e_0$  je skalár a  $\bar{e}$  je vektor.

Kvaternión  $\hat{e}_{12}$  v maticovom zápise

$$E_{12} = [e_0, e_1, e_2, e_3] = \left[ c \frac{\Phi}{2}, c\alpha s \frac{\Phi}{2}, c\beta s \frac{\Phi}{2}, c\gamma s \frac{\Phi}{2} \right] \quad (3)$$

sa dá určiť z matice  $S_{12}$  smerových kosínusov.

Ak zmenšíme uhol  $\Phi$  na nekonečne malú hodnotu  $d\Phi$ , potom sa os  $o_n$  stane nositeľkou  $o_\omega$  okamžitej uhlovej rýchlosti  $\bar{\omega}$  sférického pohybu páky 2 voči rámu 1.

## 2 Polódiové kužele. Točivé a stredové zrýchlenie bodu.

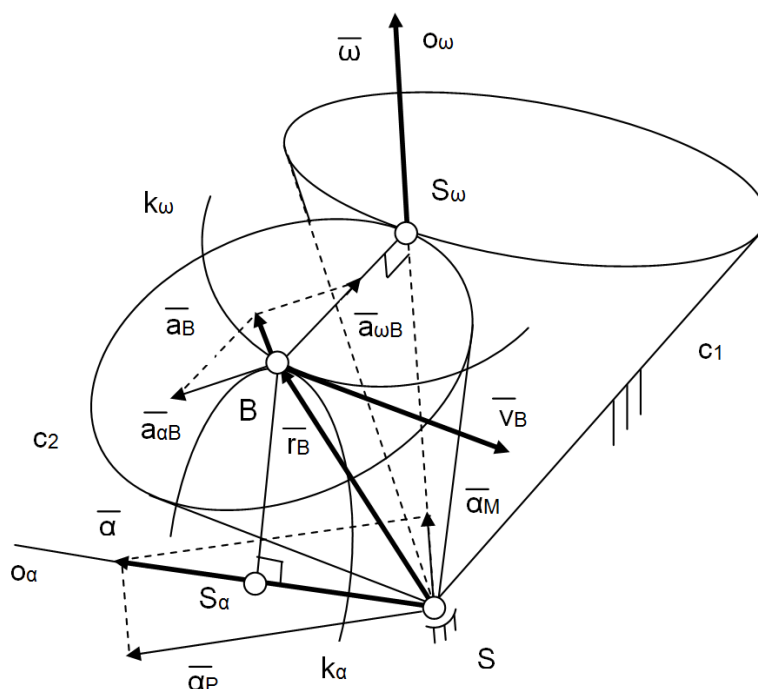
Polódiové kužele Ako ukázal Poinssot (1834), sférický pohyb páky  $\overline{SB}$  môžeme uskutočniť valením pohyblivého polódiového kužela  $c_2$  po nepohyblivom polódiovom kuželi  $c_1$  (obr.2). Nositeľkou okamžitej uhlovej rýchlosti  $\bar{\omega}$  je okamžitá dotyčnica  $o_\omega$  polódiových kuželov ako spojnice bodov  $\overline{SS_\omega}$ . Podmienkou konania sférického pohybu telesa je aby boli nositeľky  $o_\omega$  a  $o_\alpha$  rôznobežné, teda  $\bar{\omega} \times \bar{\alpha} \neq \bar{0}$ .

Rýchlosť  $\bar{v}_B$  Okamžitá rýchlosť  $\bar{v}_B$  koncového bodu B polohového vektora  $\bar{r}_B$  je podľa Eulerovej rovnice  $\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B$ .

Zrýchlenie  $\bar{a}_B$  Okamžité zrýchlenie  $\bar{a}_B$  koncového bodu B polohového vektora  $\bar{r}_B$  získame deriváciou Eulerovej rovnice  $\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B$ , teda  $\bar{a}_B = \bar{a}_{\alpha B} + \bar{a}_{\omega B}$ . Na rozdiel od rotačného pohybu telesa prvý člen  $\bar{a}_{\alpha B} = \bar{\alpha} \times \bar{r}_B$  nazývame točivé zrýchlenie (nie tangenciálne) a druhý člen  $\bar{a}_{\omega B} = \bar{\omega} \times \bar{v}_B$  stredové zrýchlenie (nie normálové zrýchlenie) bodu B.

Priemety  $\bar{\alpha}_M, \bar{\alpha}_P$  Priemet  $\bar{\alpha}_M$  okamžitého uhlového zrýchlenia  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_M + \bar{\alpha}_P$  do nositeľky  $o_\omega$  okamžitej uhlovej rýchlosti  $\bar{\omega}$  spôsobuje zmenu veľkosti uhlovej rýchlosti  $\bar{\omega}$

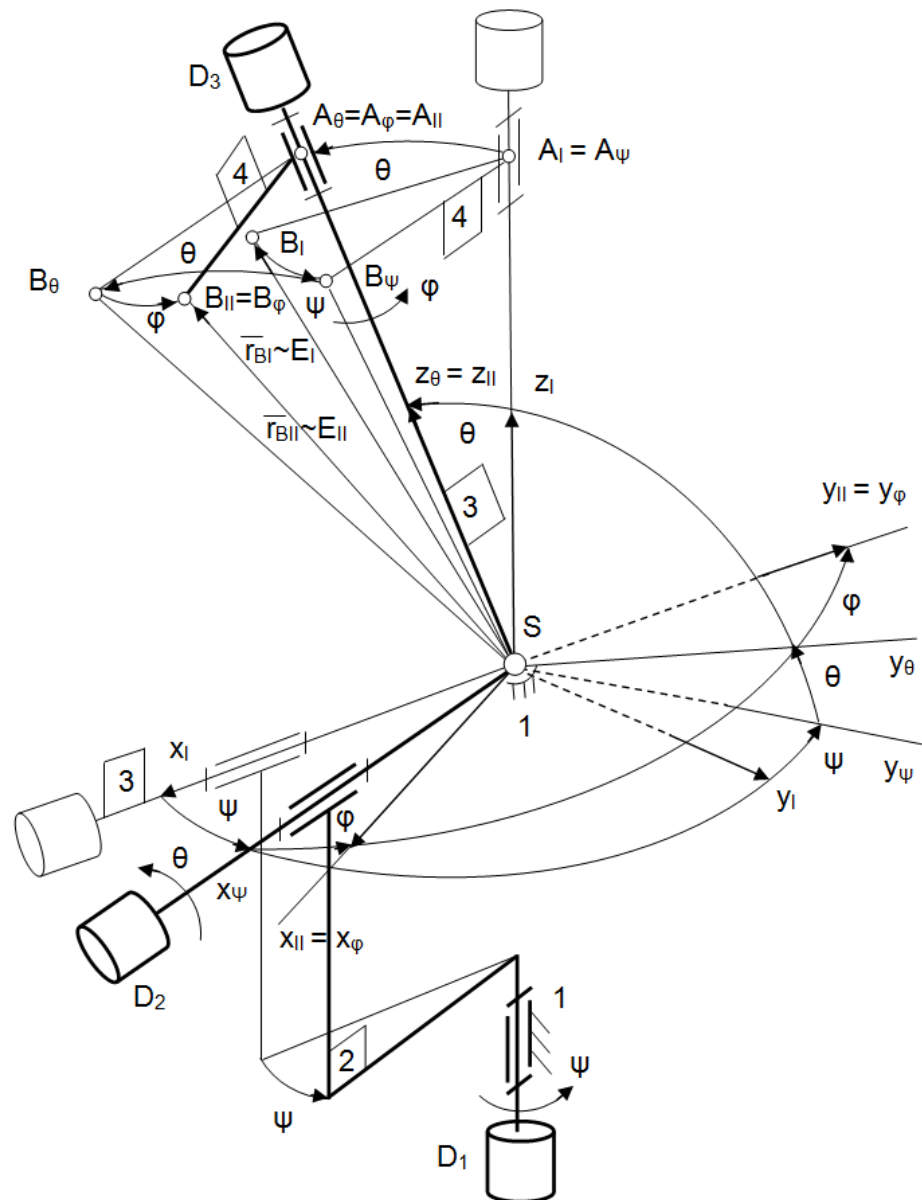
a priemet  $\bar{\alpha}_p$  okamžitého uhlového zrýchlenia  $\bar{\alpha}$  kolmý na nositeľku  $o_\omega$  spôsobuje zmenu polohy okamžitej uhlovej rýchlosti  $\bar{\omega}$ .



Obr.2 Okamžitá uhlová rýchlosť  $\bar{\omega}$  na nositeľke  $o_\omega$  a okamžité uhlové zrýchlenie  $\bar{\alpha}$  na nositeľke  $o_\alpha$  pri sférickom pohybe páky  $\overline{SB}$  s polohovým vektorom  $\bar{r}_B$ .

### Otvorený sférický mechanizmus

V priemysle sa na premiestnenie sféricky uložennej ovládacej páčky E z danej východiskovej polohy  $\overline{SB}_I \equiv E_I$  do danej konečnej polohy  $\overline{SB}_{II} \equiv E_{II}$  používa otvorený sférický mechanizmus na obr.3, ktorý má všetky geometrické väzby typu  $t = 5$  a pohyblivosť  $n = 3$ , (3 nezávislé súradnice polohy pre 3 hnacie členy). Zo vzťahu  $n = n_v(u-1) - \sum_{t=1}^{t_m} t s_t$  pre výpočet pohyblivosti otvoreného mechanizmu, ktorý má v štruktúre počet  $s = u - 1$  geometrických väzieb, kde  $u$  je počet členov, potom pre dané podmienky vyplýva, že počet členov je  $u = 4$  a otvorený sférický mechanizmus bude mať tri rotačné geometrické väzby, teda  $s = 3$ . sférickým premiestnením (Eulerove uhly: precesia  $\psi_{21}$ , nutácia  $\theta_{32}$  a lokálna rotácia  $\varphi_{43}$ ). Východisková poloha lokálnej súradnicovej sústavy  $(S, x_{II}, y_{II}, z_{II})_I$  telesa E je totožná so vzťažnou súradnicovou sústavou  $(S, x_I, y_I, z_I)$ .



Obr.3 Premiestnenie sféricky uloženej ovládacej páčky E z danej východiskovej polohy  $\overline{SB}_I \equiv E_I$  do konečnej polohy  $\overline{SB}_{II} \equiv E_{II}$  pomocou otvoreného mechanizmu s motorčkami  $D_1, D_2, D_3$ .

### Eulerove uhly

Východisková poloha lokálnej súradnicovej sústavy  $(S, x_{II}, y_{II}, z_{II})_I$  páčky E je totožná so vzťažnou súradnicovou sústavou  $(S, x_I, y_I, z_I)$ . Jednoznačne daná priesečnica  $x_\psi$  rovín  $x_\psi \equiv (x_I, y_I) \times (x_{II}, y_{II})$  poskytuje prvý uhol preciesie  $\psi \equiv \sphericalangle(x_I, x_\psi)$ , alebo  $\psi \equiv \sphericalangle(y_I, y_\psi)$ , o ktorý treba pootočiť lokálnu súradnicovú sústavu  $(S, x_{II}, y_{II}, z_{II})_I$  páčky E okolo osi  $z_I$ . Druhý uhol nutácie  $\theta \equiv \sphericalangle(z_I, z_{II})$  vyplýva za

vzájomnej polohy osí  $z_I, z_{II}$  alebo  $\theta \equiv \angle(y_\psi, y_\theta)$ . O uhol nutácie  $\theta \equiv \angle(z_I, z_{II})$  treba pootočiť lokálnu súradnicovú sústavu E okolo osi  $x_\psi$ . Lokálna súradnicová sústava telesa E sa dostane do konečnej polohy  $(S, x_{II}, y_{II}, z_{II})_{II}$  po pootočení (lokálna rotácia) okolo osi  $z_2$  o tretí uhol  $\varphi \equiv \angle(x_\psi, x_{II})$ , alebo  $\varphi \equiv \angle(y_\theta, y_{II})$ . Eulerove uhly  $\psi, \theta, \varphi$  slúžia na premiestnenie sféricky uloženej ovládacej páčky E z danej východiskovej polohy  $\overline{SB}_I \equiv E_I$  do konečnej polohy  $\overline{SB}_{II} \equiv E_{II}$  pomocou otvoreného mechanizmu s motorčekmi  $D_1, D_2, D_3$ .

Okamžitá uhlová rýchlosť

Okamžitá uhlová rýchlosť  $\overline{\omega}$  sférického pohybu telesa E bude vyplývať z toho za aký čas a ako (rovnomerne, nerovnomerne) sa má teleso E premiestniť z danej východiskovej do danej konečnej polohy. Okamžitá uhlová rýchlosť  $\overline{\omega}$  sférického pohybu telesa E voči vzťažnému rámu bude mať súradnice vyjadrené v lokálnych sústavách ako súčet uhlových rýchlostí  $\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k}_I + \dot{\theta}\overline{i}_\psi + \dot{\varphi}\overline{k}_{II}$ .

Stredná uhlová rýchlosť

Motorčeky  $D_1, D_2, D_3$  otvoreného mechanizmu môžu uskutočniť pootočenia dané uhlami precesie  $\psi_{21}$ , nutácie  $\theta_{32}$  a vlastnej rotácie  $\varphi_{43}$  postupne, alebo súčasne. Teleso E sa z danej východiskovej do danej konečnej polohy dostane najrýchlejšie ak budú motorčeky  $D_1, D_2, D_3$  pracovať súčasne. Potom stredná konštantná uhlová rýchlosť  $\overline{\omega}_{41A}$  sférického pohybu telesa E bude daná súčtom stredných konštantných uhlových rýchlostí:

$$\overline{\omega}_{41A} = \overline{\psi}_{21A} + \overline{\theta}_{32A} + \overline{\varphi}_{43A}.$$

Eulerove kinematické rovnice

Na to, aby sme mohli vyjadriť okamžitú rýchlosť  $\overline{v}_A$  koncového bodu A sprievodiča rotujúceho telesa E je potrebné pretransformovať vektor  $\overline{\omega} = \dot{\psi}\overline{k}_I + \dot{\theta}\overline{i}_\psi + \dot{\varphi}\overline{k}_{II}$  okamžitej uhlovej rýchlosti sférického pohybu telesa E do lokálnej súradnicovej sústavy  $(S, x_{II}, y_{II}, z_{II})_{II}$

$$\overline{\omega}_E = \omega_x \overline{i}_{II} + \omega_y \overline{j}_{II} + \omega_z \overline{k}_{II}$$

Na to je potrebné urobiť priemety jednotkových vektorov pre všetky tri Eulerove uhly  $\psi, \theta, \varphi$ .

Pri prvom otočení o uhol precesie  $\psi \equiv \sphericalangle(x_I, x_\psi)$  ide o priemety jednotkového vektora  $\bar{i}_I$  do smeru osí  $x_\psi$  a  $y_\psi$  na obr.4:

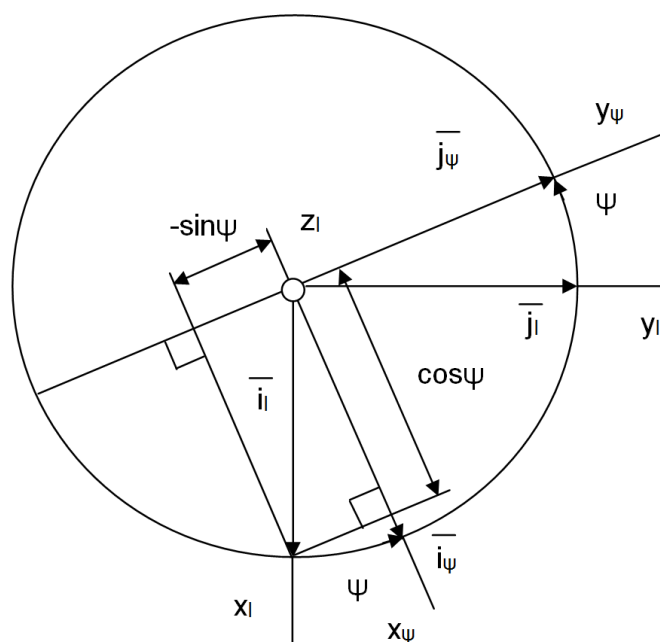
$$\bar{i}_I = (\bar{i}_I \cdot \bar{i}_\psi) \bar{i}_\psi + (\bar{i}_I \cdot \bar{j}_\psi) \bar{j}_\psi$$

Potom

$$\bar{i}_I = c\psi \bar{i}_\psi - s\psi \bar{j}_\psi$$

$$\bar{j}_I = s\psi \bar{i}_\psi + c\psi \bar{j}_\psi$$

$$\bar{k}_I = \bar{k}_\psi$$



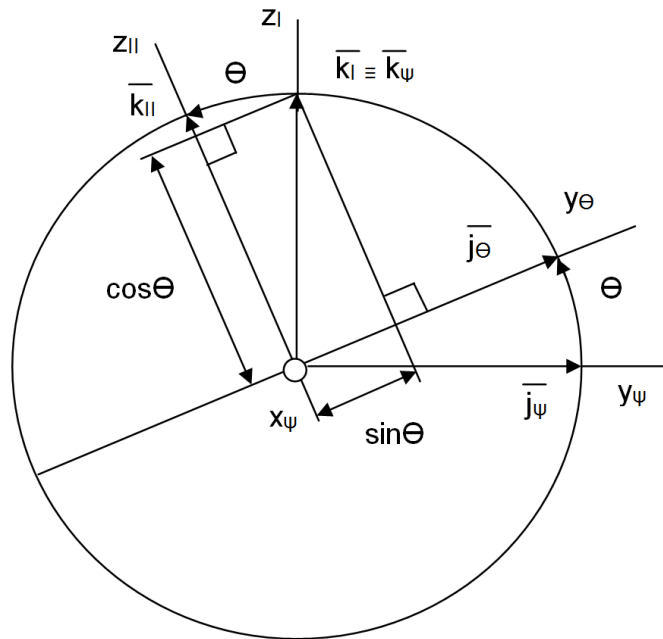
Obr.4 Priemety jednotkového vektora  $\bar{i}_I$  do smeru osí  $x_\psi$  a  $y_\psi$ .

Pri druhom otočení o uhol nutácie  $\theta \equiv \sphericalangle(z_I, z_{II})$  ide o priemety jednotkového vektora  $\bar{k}_\psi$  do smeru osí  $z_I$  a  $z_{II}$  na obr.5:

$$\bar{i}_\psi = \bar{i}_\theta$$

$$\bar{j}_\psi = c\theta \bar{j}_\theta - s\theta \bar{k}_{II}$$

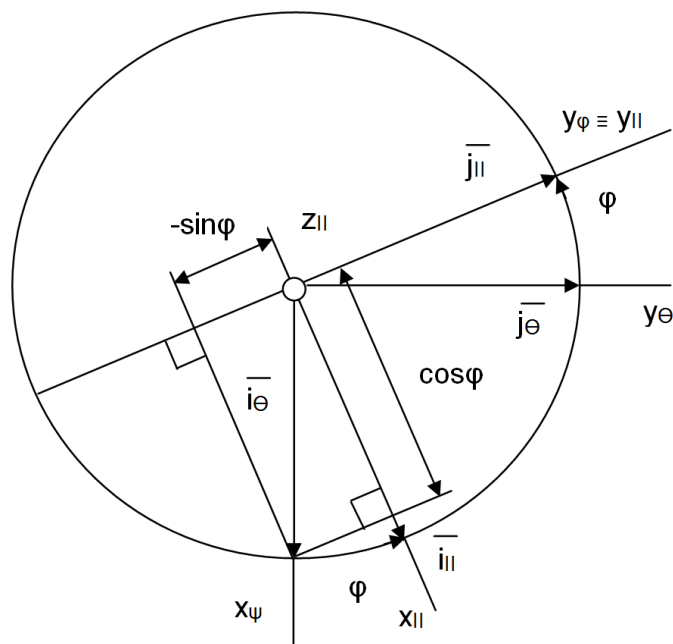
$$\bar{k}_\psi = s\theta \bar{j}_\theta + c\theta \bar{k}_{II}$$



Obr.5 Priemety jednotkového vektora  $\bar{k}_\psi$  do smeru osí  $y_\vartheta$  a  $z_{II}$ .

Pri treťom otočení o uhol  $\varphi \equiv \sphericalangle(x_\psi, x_{II})$  vlastnej rotácie ide o priemety jednotkového vektora  $\bar{i}_\theta$  do smeru osí  $x_{II}$  a  $y_{II}$  na obr.6:

$$\begin{aligned}\bar{i}_\theta &= c\varphi \bar{j}_{II} - s\varphi \bar{j}_\psi \\ \bar{j}_\theta &= s\varphi \bar{i}_{II} + c\varphi \bar{j}_{II} \\ \bar{k}_\psi &= \bar{k}_\varphi\end{aligned}$$



Obr.6 Priemety jednotkového vektora do smeru osí  $x_\psi$  a  $y_\psi$ .

Po úprave dostaneme okamžitú uhlovú rýchlosť  $\bar{\omega}_E = \omega_x \bar{i}_E + \omega_y \bar{j}_E + \omega_z \bar{k}_E$  sférického pohybu telesa E so súradnicami  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  v lokálnej súradnicovej sústave  $(S, x_E, y_E, z_E)_E$

$$\bar{\omega}_E = (\dot{\psi} s \theta s \varphi + \dot{\theta} c \varphi) \bar{i}_E + (\dot{\psi} s \theta c \varphi - \dot{\theta} s \varphi) \bar{j}_E + (\dot{\psi} c \theta + \dot{\varphi}) \bar{k}_E$$

Eulerove kinematické rovnice sú dané súradnicami  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  :

$$\omega_x = \dot{\psi} s \theta s \varphi + \dot{\theta} c \varphi$$

$$\omega_y = \dot{\psi} s \theta c \varphi - \dot{\theta} s \varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi} c \theta + \dot{\varphi}$$