doc. Ing. František Palčák, PhD., Ústav aplikovanej mechaniky a mechatroniky,
Strojnícka fakulta STU v Bratislave, www.sjf.stuba.sk

Numerické riešenie systému lineárnych algebrických rovníc LAR v programe MATLAB

Daný je systém lineárnych algebrických rovníc LAR:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 48 \\ 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Cieľom numerického riešenia daného systému lineárnych algebrických rovníc LAR (1) v prostredí programu MATLAB je určiť súradnice x_1, x_2, x_3 stĺpcového vektora x (v riadkovom zápise $[3,1]$ stĺpcovej matice treba použiť na oddelenie súradníc bodkočiarku):

$$x=[x_1;\ x_2;\ x_3] \qquad (2)$$

Rovnocenne so zápisom (2) môžeme v programe MATLAB stĺpcový vektor x zapísať aj pomocou oddelenia súradníc čiarkou a s transpozíciou pomocou apostrofu:

$$x=[x_1,\ x_2,\ x_3]' \qquad (3)$$

Pri získaní riešenia $x=[x_1;\ x_2;\ x_3]$ v programe MATLAB vychádzame zo všeobecného zápisu systému lineárnych algebrických rovníc LAR:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Štvorcovú maticu $[3,3]$ A súčiniteľov pri neznámych x_1, x_2, x_3 zapíšeme v riadkovom zápise s medzerami medzi prvkami a_{ij} a bodkočiarkou medzi riadkami $A=[a_{11}\text{␣}a_{12}\text{␣}a_{13};a_{21}\text{␣}a_{22}\text{␣}a_{23};a_{31}\text{␣}a_{32}\text{␣}a_{33}];$ a vektor b pravej strany systému LAR zapíšeme s bodkočiarkami medzi súradnicami $b=[b_1;b_2;b_3]$ (stĺpcová matica $[3,1]$).
Maticový zápis systému lineárnych algebrických rovníc LAR je potom:

$$A*x=b \qquad (5)$$

Znaky a ich význam pre správne zadávanie príkazov z klávesnice.

A,a premenné začínajú písmenom, pričom treba rozlišovať veľké a malé písmená,(uppercase and lowercase letters),
medzera (space), oddelovač prvkov matice v riadku,
, čiarka, (comma), oddelovač súradníc vektora v riadku,

`	odsuvník, apostrof, (apostrophe) na transponovanie napíšeme pomocou Alt-39,
[	ľavá hranatá zátvorka (square parenthesis), prepnúť na angl. klávesnicu alt/shift (ú),
]	alt/shift (ä),
;	bodkočiarka, (česky středník), (semicolon), a) ukončenie príkazu bodkočiarku ; MATLAB vykoná príkaz ale výsledok nezobrazí, b) v riadkovom zápise stĺpcovej matice slúži na oddelenie súradníc bodkočiarku,
\	ľavé delenie, (left division), (ctrl shift), (ň),
...	pokračovacie znaky na rozdelenie príkazu do ďalšieho riadku,
%	komentáre v programe,
echo on	zobrazuje modelovací príkaz (statement) počas vykonávania funkcie,
pause	prerušenie behu, pokračovanie ľubovoľnou klávesou,
NaN	znamená neplatnú numerickú hodnotu (napr. 0/0 delenie nulou),

Pred použitím programu MATLAB treba vedieť odpovedať na otázky:

1. Do ktorej oblasti patrí úloha, ktorú potrebujeme riešiť ?
2. Aké sú možnosti riešenia v programe MATLAB ?
3. Ako sa dá overiť správnosť výsledku ?

Odpovede:

1. Riešenie $x=[x_1; x_2; x_3]$ systému lineárnych algebrických rovníc LAR (4) patrí v programe MATLAB do oblasti násobenia matíc $A*x=b$, kde A je matica súčiniteľov pri neznámych x_1, x_2, x_3 a b je vektor pravej strany systému rovníc $b=[b_1;b_2;b_3]$.
2. V matematike sa na získanie riešenia $x=[x_1; x_2; x_3]$ systému lineárnych algebrických rovníc LAR (4) v maticovom zápise (5) $A*x=b$ najčastejšie využíva inverzná matica $x=\mathrm{inv}(A)\,b$, pričom ale dochádza k nepresnostiam kvôli zaokrúhľovaniu. Presnejší výsledok sa dá dosahnuť ľavým delením (funkcia mldivide) $x=A\backslash b$, pri ktorom musia mať obidve matice A a b rovnaký počet riadkov. Riešenie x má potom rovnaký počet stĺpcov ako matica b a počet riadkov ako matica A . V našom príklade $[3,1]=[3,3]\backslash[3,1]$.
3. Ak vynásobíme maticu A získaným riešením $x=[x_1; x_2; x_3]$, tak by sme mali dostať vektor b , teda $A*x=b$.

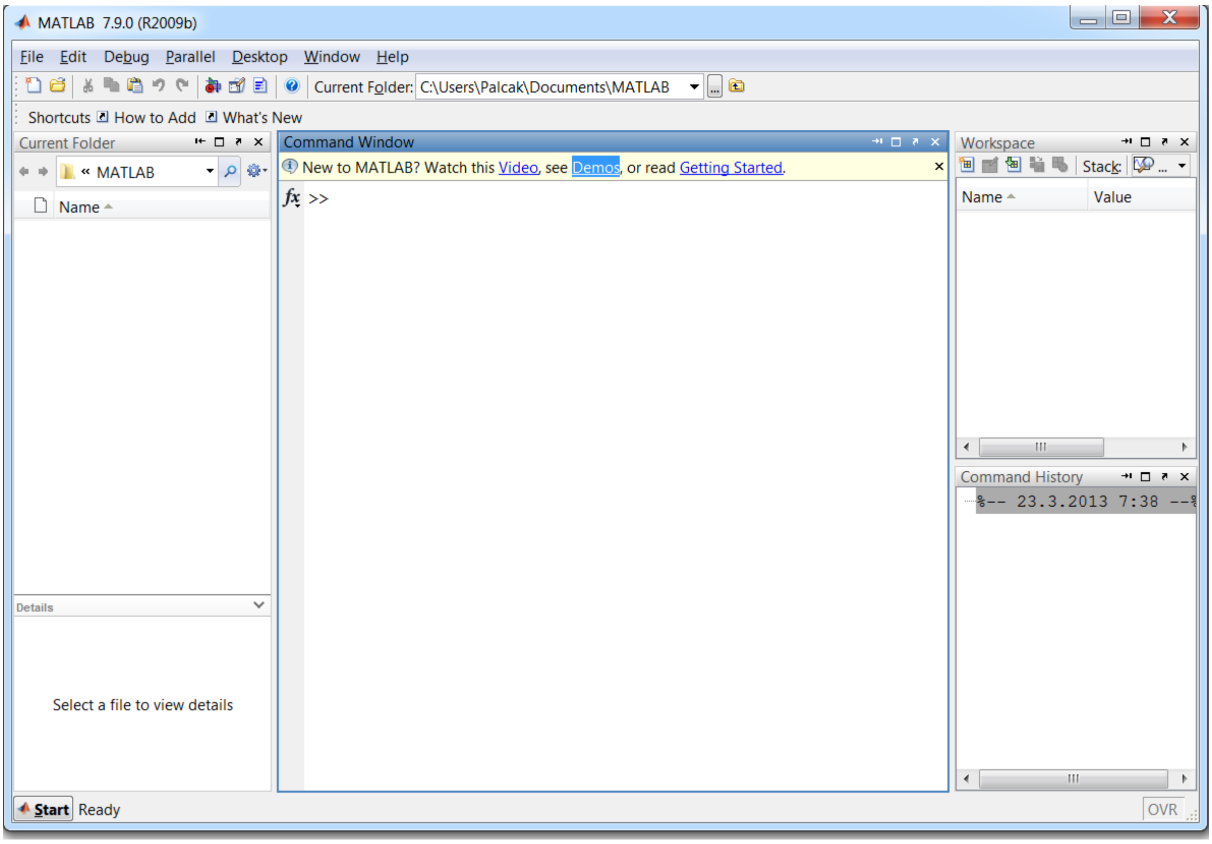
Urobíme obidve možnosti riešenia LAR v programe MATLAB.

1. riešenie $x1=[x1_1;x1_2;x1_3]$ ľavým delením označíme $x1=A\backslash b$.
2. riešenie $x2=[x2_1;x2_2;x2_3]$ inverziou označíme $x2=\mathrm{inv}(A)*b$.

Zápis postupu riešenia

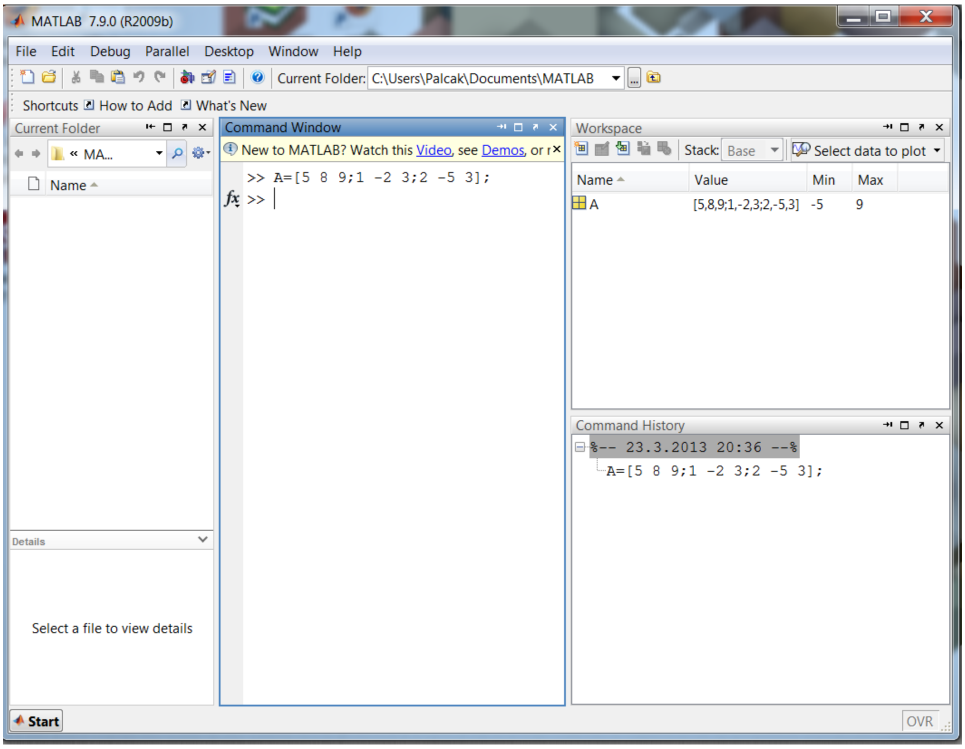
```
% Numerické riešenie systému lineárnych rovníc A*x=b .
% Prvý spôsob určenia riešenia x1=A\b ľavým delením.
A=[5 8 9;1 -2 3;2 -5 3]; % vstup matice súčiniteľov pri neznámych
b=[48;6;1];        % vstup vektora b pravej strany systému rovníc
x1=A\b;            % v premennej x1 je prvé riešenie
echo on            % zobrazuje príkaz počas vykonávania funkcie
pause              % preruš. behu, pokračovanie ľub. klávesou
format long        % dlhý formát (bežne-default je krátky-short)
% Druhý spôsob určenia riešenia pomocou inverzie x2=inv(A)*b .
x2=inv(A)*b;       % v premennej x2 je druhé riešenie
pause
format short       % krátky formát (4 miesta za des.bodkou)
E1=A*x1            % prvá skúška správnosti, E1=b
pause
E2=A*x2            % druhá skúška správnosti, E2=b
```

Po spustení programu Matlab sa zobrazí úvodné okno (Obr.1):



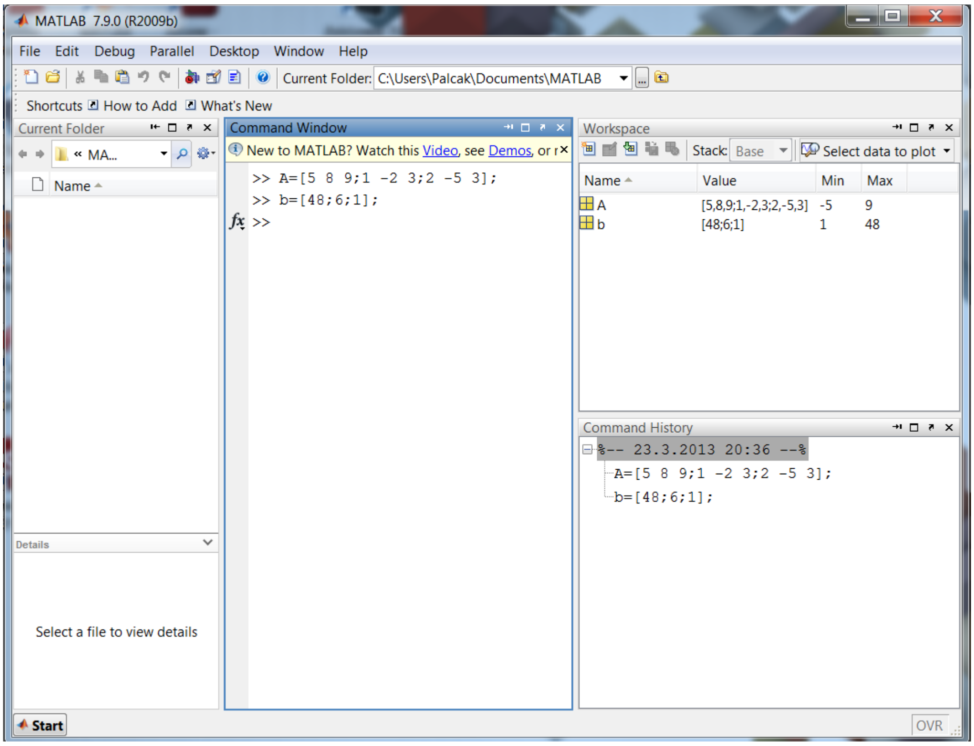
Obr.1 Úvodné okno v programe MATLAB.

Do povelového riadku (Command window) zapíšeme maticu $A=[a_{11}␣a_{12}␣a_{13};a_{21}␣a_{22}␣a_{23};a_{31}␣a_{32}␣a_{33}]$; súčiniteľov pri neznámych súradniciach x_1, x_2, x_3 vektora $x=[x_1; x_2; x_3]$, (Obr.2).



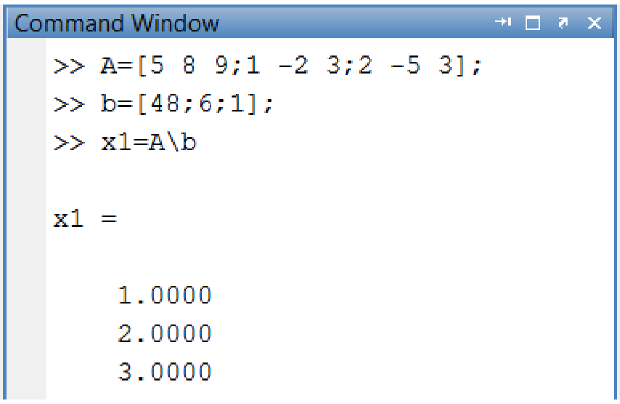
Obr.2 Matica $A=[5\ 8\ 9;1\ -2\ 3;2\ -5\ 3]$ súčiniteľov.

Zadáme vektor b pravej strany systému rovníc $b=[b_1;b_2;b_3]$ (Obr.3).



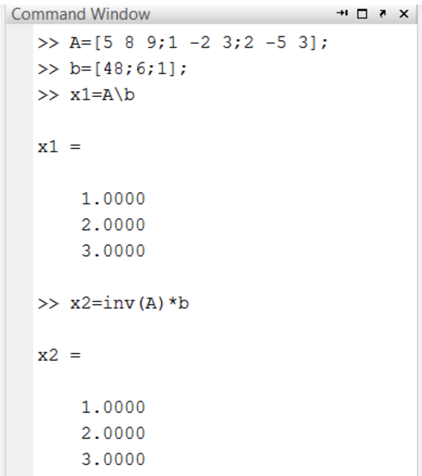
Obr.3 Okno povelov (Command window) po zadaní vektora b pravej strany systému rovníc.

Prvý spôsob určenia riešenia $x1 = A\backslash b$ získame ľavým delením (Obr.4).

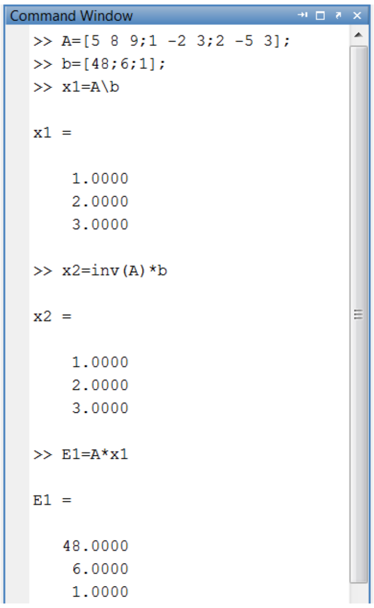


Obr.4 Stav po výpise riešenia $x1 = A\backslash b$ ľavým delením.

Pre porovnanie urobíme druhý spôsob určenia riešenia pomocou inverzie $x2 = inv(A) * b$ (Obr.5).



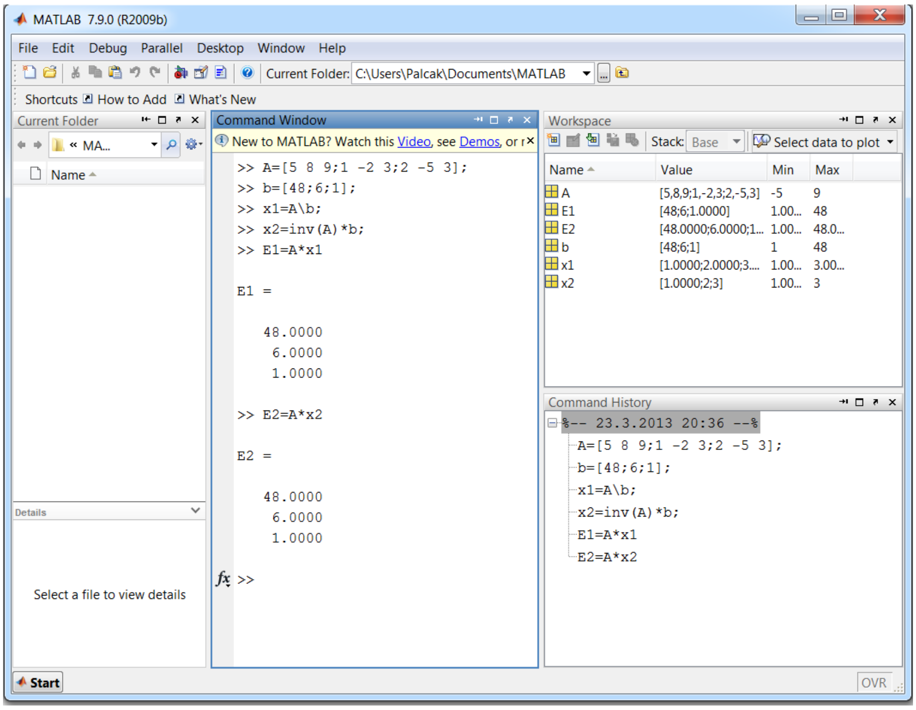
Obr.5 Stav po zápise riešenia $x2 = inv(A) * b$ pomocou inverzie



Obr.6. Výsledok prvej skúšky správnosti získaného riešenia.

Pri prvej skúške správnosti získaného riešenia $E1 = A * x1$ na Obr.6 vidíme, že E1 má súradnice vektora $b = [b_1; b_2; b_3]$,($b = [48; 6; 1]$) teda naozaj $E1 = b$.

Overíme ešte výsledok druhej skúšky správnosti získaného riešenia $E2 = A * x2$ (Obr.7). Na Obr.7 vidíme, že aj po druhej skúške správnosti získaného riešenia že E2 má súradnice vektora $b = [b_1; b_2; b_3]$, ($b = [48; 6; 1]$) teda aj $E2 = b$.



Obr.7 Výsledok druhej skúšky správnosti získaného riešenia E2=A*x2 .

Výpis celého riešenia aj s overením skopírujeme z povelového okna výberom myšou a Ctrl-C a vložíme Ctrl-V do dokumentu.

```
>> A=[5 8 9;1 -2 3;2 -5 3];
>> b=[48;6;1];
>> x1=A\b
x1 =
    1.0000
    2.0000
    3.0000
>> x2=inv(A)*b
x2 =
    1.0000
    2.0000
    3.0000
>> E1=A*x1
E1 =
   48.0000
    6.0000
    1.0000

>> E2=A*x2
E2 =
   48.0000
    6.0000
    1.0000
```