

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

STROJNÍCKA FAKULTA

Ing Miloš Musil, CSc., Prof. Ing. Ondrej Záhorec, CSc.

NÁHODNÉ KMITANIE

Návody na cvičenie

1997

©

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave

Predhovor

Predkladané skriptá sú určené študentom 5. ročníka odboru Aplikovaná mechanika ako učebná pomôcka na cvičenia z predmetu Náhodné kmitanie. Ich hlavným cieľom je pomôcť študentom pri aplikácii teórie náhodného kmitania na riešenie konkrétnych príkladov technickej praxe.

Autori

Obsah

| | |
|---|-----|
| PREDHOVOR | 3 |
| OBSAH | 4 |
| I. NÁHODNÉ VELIČINY | 5 |
| 1. Funkcie rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej veličiny | 5 |
| 2. Číselne charakteristiky náhodných veličín | 13 |
| II. NÁHODNÉ PROCESY | 21 |
| 3. Charakteristiky náhodných procesov | 21 |
| 4. Stacionárne náhodné procesy | 30 |
| 5. Stacionárne ergodické náhodné procesy | 36 |
| 6. Frekvenčné charakteristiky náhodných procesov | 38 |
| 7. Markovove procesy | 46 |
| III. NÁHODNÉ KMITANIE LINEÁRNYCH SÚSTAV | 51 |
| 8. Voľné kmitanie pri náhodných začiatkových podmienkach | 51 |
| 9. Nestacionárne vynútené kmitanie | 56 |
| 10. Stacionárne vynútené kmitanie sústavy s jedným vstupom | 68 |
| 11. Stacionárne vynútené kmitanie sústavy s viacerými vstupmi | 89 |
| IV. NÁHODNÉ KMITANIE NELINEÁRNYCH SÚSTAV | 95 |
| 12. Metóda štastickej linearizácie | 95 |
| 13. Využitie teórie Markovových procesov | 108 |

I. Náhodné veličiny

Javom (istým, nemožným a náhodným) nazývame výsledok, ako aj každý dôsledok výsledku, uskutočnenia určitého jednoznačne určeného systému podmienok (pokusu). Vzt'ahom:

$$P(A) = p$$

vyjadrujeme, že pravdepodobnosť $P(A)$ javu A je rovná číslu p .

Zmysel a vlastnosti pravdepodobnosti $P(A)$ javu A objasňujú respektíve definujú štyri axiomy (axiomaticka definícia podľa Kolmogorovova):

a) pravdepodobnosť $P(A)$ každého javu A splňuje nerovnosť

$$0 \leq P(A), \quad (1.1.a)$$

b) pre pravdepodobnosť $P(I)$ istého javu I je:

$$P(I) = 1, \quad (1.1.b)$$

c) pre navzájom nezlučiteľné (disjunktné) javy A_1, A_2, \dots, A_n ($A_j \cap A_k = \emptyset$) je:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \quad (1.1.c)$$

d) pre podmienenú pravdepodobnosť $P(A|B)$ javu A , že nastal jav B je:

$$P(A|B) P(B) = P(A \cap B). \quad (1.1.d)$$

Na základe týchto štyroch axiom možno odvodiť všetky základné vlastnosti pravdepodobnosti. Z prvých troch axiom vyplýva napríklad, že:

pravdepodobnosť $P(\emptyset)$ nemožného javu \emptyset je:

$$P(O) = 0,$$

pravdepodobnosť $P(\bar{A})$ javu opačného (doplnkového-komplementárneho) k javu A je:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

Zo štvrtej axiomy vyplýva napríklad, že:

pre dva nezávislé (stochasticky nezávislé) javy A, B , pre ktoré nezávisí pravdepodobnosť jedného z nich na tom či druhý jav nastal alebo nie platí:

$$P(A|B) = P(A),$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Veličinu X , ktorá nadobúda rôzne číselné hodnoty x , pričom nadobudnutie každej z týchto hodnôt je náhodný jav s určitou pravdepodobnosťou, nazývame náhodná veličina.

Veličiny, ktoré nadobúdajú vopred neznáme spojité, prípadne diskkrétne sa meniace hodnoty, nazývame spojité, respektíve diskkrétne náhodné veličiny.

1. Funkcie rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej veličiny

Náhodná veličina X je definovaná definičným oborom hodnôt x a pravdepodobnosťou výskytu týchto hodnôt.

Zákon rozloženia $p(x)$ diskkrétnej náhodnej veličiny X definuje vzťah:

$$p(x) = P(X = x) \tag{1.1}$$

Distribučnú funkciu $F(x)$ diskkrétnej alebo spojitej náhodnej veličiny X definuje vzťah:

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.2)$$

Pre diskrétne náhodné veličiny platí vzťah:

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p(x_j). \quad (1.3)$$

Hustotu pravdepodobnosti (zákon rozloženia) $f(x)$ spojitej náhodnej veličiny X definuje vzťah:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (1.4)$$

Pre diskrétne náhodné veličiny platí vzťah:

$$f(x) = \sum_j p(x_j) \delta(x - x_j), \quad (1.5)$$

kde $\delta(x)$ je Diracova δ funkcia, pre ktorú platí:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty; & x = 0 \\ 0; & x \neq 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Diracova δ funkcia má vlastnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (1.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - y) dx = \varphi(y), \quad (1.8)$$

kde $\varphi(x)$ je ľubovoľná funkcia spojitá v bode $x = y$.

Základné vlastnosti distribučnej funkcie $F(x)$ a hustoty pravdepodobnosti $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (1.10-11)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a), \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.12-13)$$

$$F(x_1) \leq F(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2, \quad f(x) \geq 0, \quad (1.14-15)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= 1, & & \end{aligned} \quad (1.16-17)$$

Príklady

Pr.1.1

Určte distribučnú funkciu $F(x)$ a hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej veličiny X , ktorú získame náhodným výberom čísla z intervalu $\langle a, b \rangle$.

Riešenie.

Na základe vzťahov (1.1) a (1.2) je:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases} .$$

Využitím vzťahu (1.11) dostaneme:

$$f(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1}; & x \in \langle a, b \rangle \\ 0; & x \notin \langle a, b \rangle \end{cases} .$$

Pr.1.2

Zistite, či funkcia:

$$F(x) = (1 + x)^{-2}$$

môže byť časťou distribučnej funkcie náhodnej veličiny X na úseku definičného oboru:

a) $(-\infty, \infty)$,

b) $\langle 0, \infty \rangle$,

c) $(-\infty, 0]$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.16) je:

a) $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} (1 + x)^{-2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{-2} = 0$; nemôže byť,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{-2} = 0$; nemôže byť,

c) $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} (1 + x)^{-2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{-2} = 1$; môže byť.

Pr.1.3

Hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny X je daná vzťahom:

$$f(x) = a x^2 e^{-kx}, \quad (k > 0, 0 \leq x < \infty).$$

Určte:

a) koeficient a ,

b) distribučnú funkciu $F(x)$,

c) pravdepodobnosť, s akou sa náhodná veličina bude nachádzať v intervale $\langle 0; 1/k \rangle$.

Riešenie.

a) Na základe vzťahu (1.17) má byť :

$$\int_0^{\infty} a x^2 e^{-kx} dx = 1.$$

Potom platí:

$$a = \left(\int_0^{\infty} x^2 e^{-kx} dx \right)^{-1} = \frac{k^3}{2}.$$

b) Na základe vzťahu (1.10) je:

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx} dx = 1 - \frac{k^2 x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}.$$

c) Na základe vzťahu (1.12) je:

$$P(0 \leq X \leq k^{-1}) = F(k^{-1}) - F(0) = 1 - 5(2e)^{-1}.$$

Pr.1.4

Náhodná veličina X vyjadruje počet výkmitov strojného zariadenia za dané obdobie. Vyjadrite hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej veličiny X , pomocou δ funkcie ak náhodná veličina X má rozdelenie pravdepodobnosti dané tabuľkou:

| | | | | |
|----------|-----|-----|------|------|
| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $p(x_j)$ | 0.6 | 0.3 | 0.08 | 0.02 |

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.5) je:

$$f(x) = 0.6 \delta(x) + 0.3 \delta(x-1) + 0.08 \delta(x-2) + 0.02 \delta(x-3).$$

Pr.1.5

Ukážte ekvivalentnosť vzťahov (1.10) a (1.3) pre diskkrétne náhodne veličiny.

Riešenie.

Dosadením vzťahu (1.5) do vzťahu (1.10) dostaneme:

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p(x_j) \int_{-\infty}^x \delta(s - x_j) ds.$$

Keďže pre $x < x_j$ je:

$$\int_{-\infty}^x \delta(s - x_j) ds = 0,$$

a pre $x > x_j$ je:

$$\int_{-\infty}^x \delta(s - x_j) ds = 1,$$

tak na základe predošleho vzťahu platí vzťah (1.3).

Pr.1.6

Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej veličiny X má tvar:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Nájdite hustotu pravdepodobnosti $f(x)$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.11) je:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pr.1.7

Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej veličiny X má tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{a}{x})^b; & x \geq a \\ 0; & x < a \end{cases}; \quad (b > 0).$$

Najdite hodnotu x_0 , od ktorej bude náhodná veličina X väčšia s pravdepodobnosťou p .

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.2) je:

$$1 - (\frac{a}{x_0})^b = p.$$

Po úprave dostaneme:

$$x_0 = a (1 - p)^{\frac{1}{b}}.$$

Pr.1.8

Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej veličiny X , ktorá reprezentuje čas bezporuchovej prevádzky stroja, má tvar:

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{\delta t}{T}}, \quad (t \geq 0).$$

Určte:

- pravdepodobnosť bezporuchovej prevádzky stroja za čas $t=T$,
- hustotu pravdepodobnosti $f(t)$.

Riešenie.

a) Na základe vzťahu (1.12) je:

$$P(0 \leq X \leq T) = F(T) - F(0) = 1 - e^{-\delta} - 1 + 1 = 1 - e^{-\delta}.$$

b) Na základe vzťahu (1.11) je:

$$f(t) = \frac{\delta}{T} e^{-\frac{\delta t}{T}}.$$

Pr.1.9

Distribučná funkcia $F(x)$ náhodnej veličiny X má tvar:

$$F(x) = a + b \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad (-\infty < x < \infty).$$

Určte:

- konštanty a , b ,
- hustotu pravdepodobnosti $f(x)$,
- $P(\alpha \leq X \leq \beta)$.

Riešenie.

a) Na základe vzťahu (1.16) je:

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} [a + b \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)] = a - b \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [a + b \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)] = a + b \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{\pi}.$$

b) Na základe vzťahu (1.11) je:

$$f(x) = [2\pi(x^2 + \frac{1}{4})]^{-1}.$$

c) Na základe vzťahu (1.12) je:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(\beta - \alpha)}{2(\frac{1}{4} + \alpha\beta)}.$$

Pr.1.10

Určte konštantu a tak, aby funkcia:

$$f(x) = a (1 + x^2)^{-1}$$

mohla byť hustotou pravdepodobnosti náhodnej veličiny X .

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.17) pre hustotu pravdepodobnosti platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1.$$

Potom je:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Pr.1.11

Polohu bodu v ľubovoľnom časovom okamihu vyjadruje vzťah:

$$x = a \sin(\omega t).$$

Určte:

- distribučnú funkciu $F(x)$ polohy bodu,
- pravdepodobnosť s akou sa bod nachádza v intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$,

Riešenie.

- Pravdepodobnosť, že sa bod nachádza v intervale $\langle x, x + dx \rangle$ je priamo úmerná pomeru dĺžky intervalu ku rýchlosti bodu. Potom platí:

$$dF(x) = P(x \leq X \leq x + dx) = k \frac{dx}{\dot{x}} = k \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} = k dt = f(x) dx,$$

kde k je zatiaľ neznáma konštanta úmernosti. Keďže platí:

$$\frac{dx}{dt} = a \omega \cos(\omega t) = a \omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \omega \sqrt{a^2 - x^2},$$

potom je:

$$f(x)_p = \frac{k}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}},$$

kde $f(x)_p$ je hustota pravdepodobnosti v intervale $\langle -a, a \rangle$. Na základe vzťahu (1.17) je:

$$\int_{-a}^a \frac{k}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{k}{\omega} [\arcsin(\frac{x}{a})]_{-a}^a = 1,$$

po úprave ktorého dostaneme hodnotu k :

$$k = \frac{\omega}{\pi}.$$

Vyjadrenie hustoty pravdepodobnosti $f(x)$ funkcie $x = a \sin(\omega t)$ je:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}; & / x/ \leq a \\ 0; & / x/ > a \end{cases}.$$

Na základe vzťahu (1.10) nájdeme distribučnú funkciu $F(x)$:

$$F(x)_p = \int_{-a}^x \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

$$F(x)_p = \frac{1}{2} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$F(x) = \begin{cases} 1; & x > a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right); & -a \leq x \leq a \\ 0; & x < -a \end{cases}$$

b) Na základe vzťahu (1.16) je:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\pi} [\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)].$$

Rovnaký výsledok dostávame aj zo vzťahu:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{t_x}{T},$$

kde

$$t_x = 2 [\arcsin\left(\frac{x_2}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)] \omega^l, T = \frac{2\pi}{\omega},$$

pričom t_x vyjadruje čas, počas ktorého sa bod zdržuje v intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ počas jednej periódy a T vyjadruje čas trvania jednej periódy.

Pr.1.12

Určte pravdepodobnosť, s akou sa bude nachádzať náhodná veličina X s hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

(normálne - Gaussovo rozdelenie) v intervale $\langle a - 3b, a + 3b \rangle$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (1.13) dostaneme:

$$\begin{aligned}
 P(a - 3b \leq X \leq a + 3b) &= P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \\
 &= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \phi(t_2) - \phi(t_1) = \\
 &= \phi\left(\frac{x_2 - a}{b}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - a}{b}\right) = 2\phi(3) = 0,9973,
 \end{aligned}$$

kde $t = \frac{x-a}{b}$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ je tabuľkovo spracovaná Laplaceova funkcia s vlastnosťami:

$$\phi(0) = 0, \phi(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2}, \phi(-u) = -\phi(u).$$

2. Číselne charakteristiky náhodných veličín

Ako číselné charakteristiky náhodných veličín, od ktorých sa požaduje, aby výstižne reprezentovali podstatné vlastnosti náhodných veličín, sa najčastejšie používajú momenty, kde n -tý moment respektíve moment n -tého rádu je:

$$M[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Stredná hodnota (moment 1. rádu) m_x (1m_x) náhodnej veličiny X je:

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.1)$$

Centrovaná náhodná veličina X_c je:

$$X_c = X - m_x. \quad (2.2)$$

Rozptyl, disperzia (moment 2. rádu) D_x ($^2m_{xc}$) náhodnej veličiny X je:

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X_c)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx, \quad (2.3)$$

kde veličina σ_x je smerodajná odchýlka náhodnej veličiny X .

Kovariancia (korelačný moment) K_{xy} náhodných veličín X, Y je:

$$K_{xy} = M[X_c Y_c] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy, \quad (2.4)$$

kde $f(x, y)$ je druhá (vzájomná) hustota pravdepodobnosti náhodných veličín X, Y .

Korelácia R_{xy} náhodných veličín X, Y je:

$$R_{xy} = M[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

Koeficient korelácie r_{xy} náhodných veličín X, Y je:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.6)$$

Ak náhodné veličiny X, Y sú nezávislé, potom:

$$f(x, y) = f(x) f(y). \quad (2.7)$$

Ak Y je náhodná veličina daná funkciou $Y = \varphi(X)$ náhodnej veličiny X , potom strednú hodnotu m_y a disperziu D_y možno vyjadriť vzt'ahmi:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad (2.8)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x) dx. \quad (2.9)$$

Príklady

Pr.2.1

Určte strednú hodnotu m_y a rozptyl D_y náhodnej veličiny Y , keď je:

$$Y = aX + b,$$

kde X je náhodná veličina so známou strednou hodnotou m_x a rozptylom D_x , pričom a , b sú konštanty.

Riešenie.

Na základe vzťahov (2.1) a (2.8) je:

$$m_y = M[Y] = M[aX + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Potom na základe vzťahov (2.1) a (1.17) je:

$$m_y = a m_x + b.$$

Na základe vzťahov (2.3) a (2.9) je:

$$\begin{aligned} D_y &= M[(Y - m_y)^2] = M[(aX + b - a m_x - b)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [ax + b - a m_x - b]^2 f(x) dx = \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = a^2 D_x. \end{aligned}$$

Pr.2.2

Určte strednú hodnotu m_z a rozptyl D_z náhodnej veličiny Z , keď je:

$$Z = X + Y,$$

kde X, Y sú náhodné veličiny so známymi strednými hodnotami m_x, m_y , rozptylmi D_x, D_y a kovarianciou K_{xy} .

Riešenie.

Na základe vzťahu (2.1) je:

$$\begin{aligned} m_z = M[Z] &= M[X + Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_y(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_x(y) dy = \\ &= M[X] + M[Y] = m_x + m_y. \end{aligned}$$

Na základe vzťahu (2.3) je:

$$\begin{aligned} D_z &= M[(Z_c)^2] = M[(Z - m_z)^2] = M[(X + Y - m_x - m_y)^2] = M[(X_c + Y_c)^2] = \\ &= M[X_c^2 + 2X_c Y_c + Y_c^2]. \end{aligned}$$

Potom analogicky ako pre strednú hodnotu a na základe vzťahu (2.4) je:

$$D_z = D_x + 2 K_{xy} + D_y.$$

Pr.2.3

Určte strednú hodnotu m_{x_c} centrovanej náhodnej veličiny X_c .

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 2.2 a na základe vzťahov (2.1-2) je:

$$m_{xc} = M[X_c] = M[X - m_x] = M[X] - M[m_x] = 0.$$

Pr.2.4

Ukážte, že platí:

$$D_x = M[X^2] - m_x^2.$$

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 2.2 a na základe vzťahu (2.3) je:

$$D_x = M[(X_c)^2] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2] - 2 m_x M[X] + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2.$$

Pr.2.5

Ukážte, že pre dve nezávislé náhodné veličiny X, Y platí:

$$K_{xy} = 0.$$

Riešenie.

Na základe vzťahov (2.4) a (2.7) vyplýva:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_c y_c f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_c y_c f(x) f(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y_c f(y) dy = M[X_c] M[Y_c]. \end{aligned}$$

Potom na základe riešenia príkladu 2.3 dostaneme vzťah:

$$K_{xy} = 0.$$

Pr.2.6

Určte strednú hodnotu m_z a rozptyl D_z náhodnej veličiny Z , keď

$$Z = X Y,$$

kde X, Y sú nezávislé náhodné veličiny so známymi strednými hodnotami m_x, m_y , disperziami D_x, D_y a kovarianciou K_{xy}

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 2.3 a vzťahov (2.1), (2.4) je:

$$\begin{aligned} m_z &= M[Z] = M[X Y] = M[(X_c + m_x)(Y_c + m_y)] = \\ &= M[X_c Y_c] + m_x M[Y_c] + m_y M[X_c] + m_x m_y = K_{xy} + m_x m_y = R_{xy}. \end{aligned}$$

Potom na základe riešenia príkladu 2.5 je:

$$m_z = R_{xy} = m_x m_y.$$

Na základe doteraz výpočítaného a vzťahu (2.3) je:

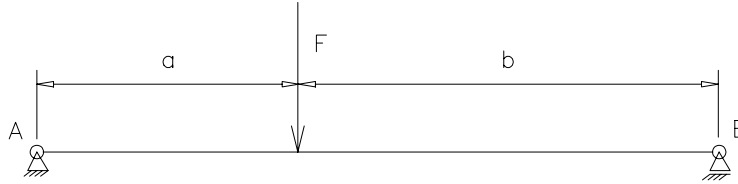
$$\begin{aligned} D_z &= M[Z_c^2] = M[(Z - m_z)^2] = M[X^2 Y^2] - 2 m_x m_y M[X Y] + m_x^2 m_y^2 = \\ &= M[X^2 Y^2] - m_x^2 m_y^2 = M[(X_c + m_x)^2 (Y_c + m_y)^2] - m_x^2 m_y^2 = \\ &= M[X_c^2 Y_c^2] + 2 m_x M[X_c Y_c^2] + 2 m_y M[X_c^2 Y_c] + \\ &+ 4 m_x m_y M[X_c Y_c] + 2 m_x^2 m_y M[Y_c] + 2 m_x m_y^2 M[X_c] + \\ &+ m_y^2 M[X_c^2] + m_x^2 M[Y_c^2]. \end{aligned}$$

Potom pomocou vzťahov (2.3), (2.7) analogicky ako pri riešení príkladu 2.5 je:

$$D_z = D_x D_y + m_y^2 D_x + m_x^2 D_y.$$

Pr.2.7

Na voľne podopretý nosník podľa obrázka č. 1 pôsobí v kolmom smere vo vzdialenosti a , b od podpier náhodná sila F so známou strednou hodnotou m_F a rozptylom D_F . Určte strednú hodnotu a rozptyl väzbových reakcií R_A , R_B a rozptyl priehybu y_F v mieste pôsobenia sily.



Obr. č.1

Riešenie.

Väzbové reakcie R_A , R_B a priehyb y_F v mieste pôsobenia sily sú:

$$R_A = \frac{b}{a+b} F; R_B = \frac{a}{a+b} F; y_F = \frac{a^2 b^2}{3 E J_x (a+b)} F.$$

Potom ako v príklade 2.1 dostaneme:

$$m_{RA} = \frac{b}{a+b} m_F; m_{RB} = \frac{a}{a+b} m_F; m_{yF} = \frac{a^2 b^2}{3 E J_x (a+b)} m_F;$$

$$D_{RA} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 D_F; D_{RB} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 D_F; D_{yF} = \left[\frac{a^2 b^2}{3 E J_x (a+b)}\right]^2 D_F.$$

Pr.2.8

Hustota pravdepodobnosti $f(x)$ náhodných výkmitov X bočného kývania lode je daná vzťahom (Rayleighovo rozdelenie):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{b^2} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Určte strednú hodnotu, rozptyl a pravdepodobnosť, s akou budú výkmity kývania lode menšie ako ich stredná hodnota.

Riešenie.

Výpočet momentov pre uvedenú hustotu pravdepodobnosti vedie k výpočtu integrálu:

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt, \quad (n > 0, \text{ celé číslo}),$$

Pri substitúcii $t^2 = u$ dostaneme Eulerov integrál, ktorým je definovaná gamma-funkcia:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du,$$

s vlastnosťami:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Potom:

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

V prípade, že k je celé číslo, dostaneme:

$$I_{n=2k} = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}, \quad I_{n=2k+1} = \frac{k!}{2}, \quad (2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

Strednú hodnotu m_A možno vyjadriť v tvare:

$$m_x = M[X] = \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx = 2\sqrt{2} b \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2} b I_2 = b\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Na základe riešenia príkladu 2.4, rozptyl D_x možno vyjadriť v tvare:

$$D[X] = M[X]^2 - m_x^2 = \frac{1}{b^2} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx - m_x^2 = 4 b^2 I_3 - \frac{\pi}{2} b^2 = b^2 (2 - \frac{\pi}{2}).$$

Hľadaná pravdepodobnosť na základe vzťahu (1.13) je:

$$P(0 \leq X \leq b\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{b^2} \int_0^{b\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx = - \int_0^{-\pi} e^t dt = -[e^{-\frac{x^2}{2b^2}}]_0^{b\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Pr.2.9

Určte strednú hodnotu m_x a rozptyl D_x náhodnej veličiny X s hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

(normálne - Gaussovo rozdelenie).

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 2.8 je:

$$m_x = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (bt+a) e^{-\frac{t^2}{2}} b dt = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2} b u + a) e^{-u^2} \sqrt{2} b du = \\
&= \sqrt{\frac{2b}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2} du + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.
\end{aligned}$$

Keďže v prvom člene je integrovaná funkcia nepárna a v druhom párna, potom na základe riešenia príkladu 2.8 stredná hodnota m_x je:

$$m_x = 0 + \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a.$$

Rozptyl D_x je:

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \\
&= \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} b dt = 2 \frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du.
\end{aligned}$$

Keďže integrovaná funkcia je párna, potom na základe riešenia príkladu 2.8 je:

$$D_x = \sigma_x^2 = 4 \frac{b^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = 4 \frac{b^2}{\sqrt{\pi}} I_2 = b^2.$$

II. Náhodné procesy

Náhodnou funkciou nazývame každú funkciu $X(t)$, ktorej hodnotami sú náhodné veličiny. Ak má argument t aplikačný význam času, hovoríme o náhodných procesoch, ak má význam priestorovej súradnice hovoríme o náhodnom poli.

Vlastnosti náhodného procesu $X(t)$ sa vyšetrujú na celom súbore jeho realizácií $x_k(t)$, $k=1,2,\dots,N$. Ak zvolíme niekoľko pevných hodnôt parametra t_j , $j=1,2,\dots,n$, dostaneme systém náhodných veličín $X(t_j)$, s n - tou respektíve s n - rozmernou distribučnou funkciou a hustotou pravdepodobnosti náhodného procesu $X(t)$:

$$F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = P\{[X(t_1) \leq x_1] \cap [X(t_2) \leq x_2] \cap \dots \cap [X(t_n) \leq x_n]\},$$

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Kvôli zjednodušeniu analytických výrazov sa pre náhodné procesy zavádza ich podrobnejšie členenie. Najväčšie zjednodušenie sa dosiahne v prípade čiste náhodného procesu (jednotlivé náhodné veličiny $X(t_j)$, $j=1,2,\dots,n$ sú navzájom nezávislé), pre ktorý platí:

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \dots f(x_n, t_n).$$

Kovariančná funkcia nekorelovaného náhodného procesu (biely šum) je:

$$K_x(t, t') = a \delta(t' - t),$$

kde konštanta a je intenzita bieleho šumu. Čiste náhodný proces je aj nekorelovaný. Z nekorelovanosti vyplýva nezávislosť len pre procesy s normálnym rozdelením.

Iné zjednodušenia, ktoré budú v ďalšom podrobnejšie spomenuté, sa dosiahnu v prípade stacionárnych, ergodických a markovových náhodných procesov.

3. Charakteristiky náhodných procesov

Podobne ako u náhodných veličín sa z praktických dôvodov zavádzajú momenty a l - tý moment náhodného procesu $X(t)$ s n - rozmernou hustotou pravdepodobnosti je:

$$M[X(t_1)^{l_1} X(t_2)^{l_2} \dots X(t_n)^{l_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

kde $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$. Zvolením hodnoty $n=2$ sa obmedzíme na minimálny nutný počet úrovní argumentu t a pomocou takto vymedzených charakteristík možno plne opísať náhodné procesy s normálnym rozdelením. V prípade všeobecnejších rozdelení pravdepodobnosti sa takýmto obmedzením dosiahne len aproximácia v rámci korelačnej teórie.

Stredná hodnota $m_x(t)$ ($^l m_x(t)$) náhodného procesu $X(t)$ je:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx. \quad (3.1)$$

Centrovaný náhodný proces $X_c(t)$ je:

$$X_c(t) = X(t) - m_x(t). \quad (3.2)$$

Kovariančná (autokovariančná) funkcia $K_x(t, t')$ náhodného procesu $X(t)$ je:

$$K_x(t, t') = M[X_c(t) X_c(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t)][x_2 - m_x(t')] f(x_1, t, x_2, t') dx_1 dx_2. \quad (3.3)$$

Rozptyl (disperzia) $D_x(t)$ náhodného procesu $X(t)$ je:

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = K_x(t,t) = M[X_c^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x,t) dx, \quad (3.4)$$

kde funkcia $\sigma_x(t)$ je smerodajná odchýlka náhodného procesu $X(t)$.

Korelačná (autokorelačná) funkcia $R_x(t,t')$ náhodného procesu $X(t)$ je:

$$R_x(t,t') = M[X(t) X(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,t,x_2,t') dx_1 dx_2. \quad (3.5)$$

Normovaná kovariančná (normovaná autokovariančná) funkcia $r_x(t,t')$ náhodného procesu $X(t)$ je:

$$r_x(t,t') = \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')}. \quad (3.6)$$

Kovariančná (vzájomná kovariančná) funkcia $K_{xy}(t,t')$ náhodných procesov $X(t)$, $Y(t)$ je:

$$\begin{aligned} K_{xy}(t,t') &= M[X_c(t) Y_c(t')] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)][y - m_y(t')] f(x,t,y,t') dx dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Korelačná (vzájomná korelačná) funkcia $R_{xy}(t,t')$ náhodných procesov $X(t)$, $Y(t)$ je:

$$R_{xy}(t,t') = M[X(t) Y(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x,t,y,t') dx dy. \quad (3.8)$$

Normovaná kovariančná (normovaná vzájomná kovariančná) funkcia $r_{xy}(t, t')$ náhodných procesov $X(t)$, $Y(t)$ je:

$$r_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_y(t')}. \quad (3.9)$$

Príklady

Pr.3.1

Určte strednú hodnotu $m_y(t)$, rozptyl $D_y(t)$ a kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = a(t) X(t),$$

kde $X(t)$ je náhodný proces so strednou hodnotou $m_x(t)$, kovariančnou funkciou $K_x(t, t')$ a $a(t)$ je nenáhodná funkcia.

Riešenie.

Na základe vzťahov (3.1) a (2.8) je:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = M[a(t) X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a(t) x(t)] f(x, t) dx = \\ &= a(t) M[X(t)] = a(t) m_x(t). \end{aligned}$$

Analogicky na základe vzťahov (3.3), (3.4) a (2.9) je:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = M\{[a(t) X(t) - a(t) m_x(t)][a(t') X(t') - a(t') m_x(t')]\} = \\ &= a(t) a(t') M[X_c(t) X_c(t')] = a(t) a(t') K_x(t, t'), \end{aligned}$$

$$D_x(t) = K_x(t, t),$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = a(t)^2 D_x(t).$$

Pr.3.2

Určte strednú hodnotu $m_y(t)$ a kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t),$$

kde $X_j(t)$ sú náhodné procesy, pre ktoré poznáme stredné hodnoty $m_{x_j}(t)$ a kovariančné funkcie $K_{x_j x_k}(t, t')$.

Riešenie

Analogicky na základe riešenia príkladu 2.2 a na základe vzťahu (3.1) je:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M\left[\sum_{j=1}^n X_j(t)\right] = \sum_{j=1}^n M[X_j(t)] = \sum_{j=1}^n m_{x_j}(t).$$

Analogicky na základe riešenia príkladu 2.2 a na základe vzťahu (3.3) je:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = M\left\{\left[\sum_{j=1}^n X_j(t) - m_{x_j}(t)\right]\left[\sum_{j=1}^n X_j(t') - m_{x_j}(t')\right]\right\} = \\ &= M\left\{\left[\sum_{j=1}^n X_{c_j}(t)\right]\left[\sum_{j=1}^n X_{c_j}(t')\right]\right\} = \sum_{j=1}^n K_{x_j}(t, t') + \sum_{j=1}^n \sum_{j \neq k, k=1}^n K_{x_j x_k}(t, t'). \end{aligned}$$

Pr.3.3

Určte strednú hodnotu $m_y(t)$ a kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau,$$

kde $X(\tau)$ je náhodný proces so strednou hodnotou $m_x(\tau)$ a kovariančnou funkciou $K_x(\tau, \tau')$.

Riešenie

Náhodný proces $Y(t)$ vyjadríme v tvare:

$$Y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n X(\tau_j) \Delta\tau.$$

Potom na základe riešenia príkladu 3.2:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} M\left[\sum_{j=1}^n X(\tau_j) \Delta\tau\right] = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n m_x(\tau_j) \Delta\tau = \\ &= \int_0^t m_x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = M\left\{\int_0^t [X(\tau) - m_x(\tau)] d\tau \int_0^{t'} [X(\tau) - m_x(\tau)] d\tau\right\} = \\ &= M\left[\int_0^t X_c(\tau) d\tau \int_0^{t'} X_c(\tau) d\tau\right] = \int_0^t \int_0^{t'} M[X_c(\tau) X_c(\tau')] d\tau d\tau' = \\ &= \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Pr.3.4

Určte strednú hodnotu $m_y(t)$ a kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

kde $X(t)$ je náhodný proces so strednou hodnotou $m_x(t)$ a kovariančnou funkciou $K_x(t, t')$.

Riešenie.

Náhodný proces $Y(t)$ vyjadríme v tvare:

$$Y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Potom na základe riešenia príkladu 3.3:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left[\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \frac{d m_x(t)}{dt}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = M\left\{\frac{d[X(t) - m_x(t)]}{dt} \frac{d[X(t') - m_x(t')]}{dt'}\right\} = \\ &= M\left[\frac{d X_c(t)}{dt} \frac{d X_c(t')}{dt'}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \{M[X_c(t) X_c(t')]\} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} [K_x(t, t')]. \end{aligned}$$

Pr.3.5

Určte normovanú kovariančnú funkciu $r_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = X e^{-\alpha t},$$

kde X je náhodná veličina so známymi charakteristikami m_x a D_x .

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 3.1 a na základe vzťahov (3.1-6) je:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[X e^{-\alpha t}] = e^{-\alpha t} M[X] = m_x e^{-\alpha t}.$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = M[(X - m_x) e^{-\alpha t} (X - m_x) e^{-\alpha t'}] = e^{-\alpha(t+t')} M[X_c^2] = \\ &= D_x e^{-\alpha(t+t')}. \end{aligned}$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = D_x e^{-2\alpha t}.$$

$$\sigma_y(t) = [D_y(t)]^{\frac{1}{2}} = \sigma_x e^{-\alpha t}.$$

$$r_y(t, t') = \frac{D_x e^{-\alpha(t+t')}}{\sigma_x e^{-\alpha t} \sigma_x e^{-\alpha t'}} = 1.$$

Pr.3.6

Určte kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

kde A, B sú náhodné veličiny so známymi charakteristikami m_A, m_B, D_A, D_B a K_{AB} .

Riešenie.

Na základe riešenia príkladov 2.2, 3.1 a na základe vzťahov (3.1-6) je:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = M[A \sin \omega t + B \cos \omega t] = M[A] \sin \omega t + M[B] \cos \omega t = \\ &= m_A \sin \omega t + m_B \cos \omega t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = \\ &= M\{(A - m_A) \sin \omega t + (B - m_B) \cos \omega t\} [(A - m_A) \sin \omega t' + (B - m_B) \cos \omega t']\} = \\ &= M[A_c^2 \sin \omega t \sin \omega t' + A_c B_c (\sin \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t' \cos \omega t) + B_c^2 \cos \omega t \cos \omega t'] = \\ &= D_A \sin \omega t \sin \omega t' + K_{AB} \sin \omega(t + t') + D_B \cos \omega t \cos \omega t'. \end{aligned}$$

Pr.3.7

Určte kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

kde A, B sú náhodné veličiny so známymi charakteristikami m_A, m_B, D_A, D_B a K_{AB} , pričom $D_A = D_B$ a $K_{AB} = 0$.

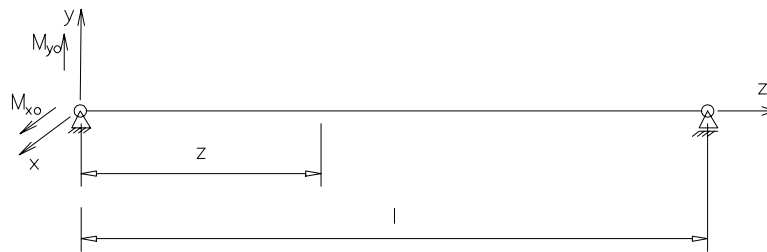
Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 3.6 dostaneme:

$$K_y(t, t') = D_A \sin \omega t \sin \omega t' + D_A \cos \omega t \cos \omega t' = D_A \cos \omega(t - t').$$

Pr.3.8

Nosník podľa obrázka č. 2 je zaťažený náhodnými (čo do veľkosti) momentami M_{x0} , M_{y0} so známymi charakteristikami m_{M_x} , m_{M_y} , D_{M_x} , D_{M_y} a $K_{M_x M_y}$. Určte strednú hodnotu $m_{\sigma}(z)$ a rozptyl $D_{\sigma}(z)$ maximálneho normálového napätia v ľubovoľnom priereze nosníka.



Obr. č. 2

Riešenie.

Ohybové momenty v ľubovoľnom priereze sú:

$$M_x(z) = M_{x0} \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

$$M_y(z) = M_{y0} \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Maximálne normálové napätie v ľubovoľnom priereze je:

$$\sigma_{max}(z) = \frac{M_x(z) y_{max}}{J_x} + \frac{M_y(z) x_{max}}{J_y} = (a M_{x0} + b M_{y0}) \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

Potom na základe riešenia príkladov 3.1 a 3.6 dostaneme:

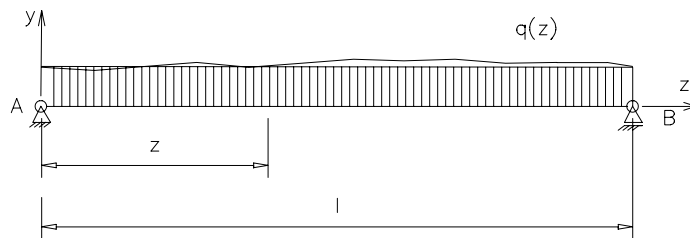
$$m_{\sigma}(z) = M[\sigma_{max}(z)] = M[(a M_{x0} + b M_{y0})(1 - \frac{z}{l})] = (a m_{Mx} + b m_{My})(1 - \frac{z}{l}).$$

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(z, z') &= M[\sigma_{max}(z) \sigma_{max}(z')] = \\ &= M[(a M_{x0c} + b M_{y0c})(1 - \frac{z}{l})(a M_{x0c} + b M_{y0c})(1 - \frac{z'}{l})] = \\ &= M[(a M_{x0c} + b M_{y0c})^2](1 - \frac{z}{l})(1 - \frac{z'}{l}) = \\ &= (a^2 D_{Mx} + 2 a b K_{MxMy} + b^2 D_{My})(1 - \frac{z}{l})(1 - \frac{z'}{l}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\sigma}(z) &= K_{\sigma}(z, z) = \\ &= (a^2 D_{Mx} + 2 a b K_{MxMy} + b^2 D_{My})(1 - \frac{z}{l})(1 - \frac{z}{l}) = \\ &= (a^2 D_{Mx} + 2 a b K_{MxMy} + b^2 D_{My})(1 - \frac{z}{l})^2. \end{aligned}$$

Pr.3.9

Nosník podľa obrázka č. 3 je zaťažený náhodne rozloženým spojitým zaťažením $q(z)$ (náhodným poľom), so známymi charakteristikami $m_q(z)$, a $K_q(z, z')$. Určte charakteristiky reakcií R_A , R_B v uložení.



Obr. č. 3

Riešenie.

Väzbové reakcie R_A , R_B môžeme vypočítať zo vzťahov:

$$R_A + R_B = \int_0^l q(z) dz,$$

$$R_B l = \int_0^l z q(z) dz,$$

úpravou, ktorých je:

$$R_A = \int_0^l q(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz,$$

$$R_B = \int_0^l q(z) \left(\frac{z}{l}\right) dz.$$

Potom na základe riešenia príkladu 3.3 je:

$$m_{RA} = M[R_A] = M\left[\int_0^l q(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz\right] = \int_0^l m_q(z) \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz,$$

$$m_{RB} = M[R_B] = M\left[\int_0^l q(z) \left(\frac{z}{l}\right) dz\right] = \int_0^l m_q(z) \left(\frac{z}{l}\right) dz,$$

$$\begin{aligned} D_{RA} &= M[R_{Ac}] = \\ &= M\left\{\int_0^l \int_0^l [q(z) - m_q(z)] \left(1 - \frac{z}{l}\right) [q(z') - m_q(z')] \left(1 - \frac{z'}{l}\right) dz dz'\right\} = \\ &= \int_0^l \int_0^l M[q_c(z) q_c(z')] \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z'}{l}\right) dz dz' = \\ &= \int_0^l \int_0^l K_q(z, z') \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{z'}{l}\right) dz dz'. \end{aligned}$$

$$D_{RB} = M[R_{Bc}] =$$

$$\begin{aligned}
&= M\left\{ \int_0^l \int_0^l [q(z) - m_q(z)] \left(\frac{z}{l}\right) [q(z') - m_q(z')] \left(\frac{z'}{l}\right) dz dz' \right\} = \\
&= \int_0^l \int_0^l M[q_c(z) q_c(z')] \left(\frac{z}{l}\right) \left(\frac{z'}{l}\right) dz dz' = \\
&= \int_0^l \int_0^l K_q(z, z') \left(\frac{z}{l}\right) \left(\frac{z'}{l}\right) dz dz'.
\end{aligned}$$

Pr.3.10

Určte kovariančnú funkciu $K_z(t, t')$ a rozptyl $D_z(t)$ náhodného procesu:

$$Z(t) = \frac{dY(t)}{dt},$$

kde $Y(t) = X \sin t$ je náhodný proces, pričom X je náhodná veličina so známymi charakteristikami m_x a D_x .

Riešenie.

Na základe riešenia príkladov 3.1 a 3.4 a na základe vzťahu (3.4) dostaneme:

$$m_z(t) = M[Z(t)] = M\left[\frac{dY(t)}{dt}\right] = M\left[\frac{d(X \sin t)}{dt}\right] = M\left[X \frac{d(\sin t)}{dt}\right] = m_x \frac{d(\sin t)}{dt}.$$

$$K_z(t, t') = M[Z_c(t) Z_c(t')] = M[(X - m_x)^2 \frac{d(\sin t)}{dt} \frac{d(\sin t')}{dt'}] = D_x \cos t \cos t'.$$

$$D_z(t) = K_z(t, t) = D_x \cos^2 t.$$

Pr.3.11

Určte kovariančnú funkciu $K_y(t, t')$ náhodného procesu:

$$Y(t) = a(t) X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt},$$

kde $X(t)$ je náhodný proces so známymi charakteristikami $m_x(t)$ a $K_x(t, t')$ a $a(t)$, $b(t)$ sú nenáhodné funkcie.

Riešenie.

Na základe riešenia príkladov 3.1, 3.2 a 3.4 dostaneme:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = M[a(t) X(t) + b(t) \frac{dX(t)}{dt}] = \\ &= M[a(t) X(t)] + M[b(t) \frac{dX(t)}{dt}] = a(t) m_x(t) + b(t) \frac{dm_x(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Keďže je:

$$\begin{aligned} Y_c(t) &= Y(t) - m_y(t) = a(t)[X(t) - m_x(t)] + b(t) \frac{d[X(t) - m_x(t)]}{dt} = \\ &= a(t) X_c(t) + b(t) \frac{dX_c(t)}{dt}, \end{aligned}$$

potom je:

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[Y_c(t) Y_c(t')] = \\ &= M\left\{ \left[a(t) X_c(t) + b(t) \frac{dX_c(t)}{dt} \right] \left[a(t') X_c(t') + b(t') \frac{dX_c(t')}{dt'} \right] \right\} = \\ &= a(t) a(t') M[X_c(t) X_c(t')] + a(t) b(t') M\left\{ \frac{\partial [X_c(t) X_c(t')]}{\partial t'} \right\} + \\ &+ a(t') b(t) M\left\{ \frac{\partial [X_c(t) X_c(t')]}{\partial t} \right\} + b(t) b(t') M\left[\frac{\partial^2 [X_c(t) X_c(t')]}{\partial t \partial t'} \right] = \\ &= a(t) a(t') K_x(t, t') + a(t) b(t') \frac{\partial K_x(t, t')}{\partial t'} + a(t') b(t) \frac{\partial K_x(t, t')}{\partial t} + b(t) b(t') \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}. \end{aligned}$$

4. Stacionárne náhodné procesy

Keď ľubovoľná distribučná funkcia, respektíve hustota pravdepodobnosti náhodného procesu $X(t)$ je nezávislá od začiatku časovej osi:

$$F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = F(x_1, t_1 + t, x_2, t_2 + t, \dots, x_n, t_n + t), \quad (4.1.a)$$

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f(x_1, t_1 + t, x_2, t_2 + t, \dots, x_n, t_n + t), \quad (4.1.b)$$

tak náhodný proces je stacionárny (silne, respektíve v užšom zmysle). Potom ak zvolíme $t = -t_1$ platí:

$$F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = F(x_1, x_2, t_2 - t_1, \dots, x_n, t_n - t_1), \quad (4.2.a)$$

$$f(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f(x_1, x_2, t_2 - t_1, \dots, x_n, t_n - t_1), \quad (4.2.b)$$

na základe čoho pre $n=2$ je:

$$m_x(t) = \text{konš.}; \quad (4.3)$$

$$D_x(t) = \text{konš.}; \quad (4.4)$$

$$K_x(t, t') = K_x(t' - t) = K_x(\tau); \quad (4.5)$$

$$R_x(t, t') = R_x(t' - t) = R_x(\tau); \quad (4.6)$$

$$r_x(t, t') = r_x(t' - t) = r_x(\tau); \quad (4.7)$$

$$K_{xy}(t, t') = K_{xy}(t' - t) = K_{xy}(\tau); \quad (4.8)$$

$$R_{xy}(t, t') = R_{xy}(t' - t) = R_{xy}(\tau); \quad (4.9)$$

$$r_{xy}(t, t') = r_{xy}(t' - t) = r_{xy}(\tau); \quad (4.10)$$

Keď náhodný proces $X(t)$ spĺňa len podmienky (4.3-10), tak náhodný proces je slabo stacionárny, respektíve stacionárny v širšom zmysle. Silne stacionárny proces je aj slabo stacionárny, naopak to všeobecne neplatí. V rámci korelačnej teórie, ktorá sa zaoberá štúdiom vlastností náhodných procesov využitím ich prvých dvoch momentov, sa hovorí o stacionarite v širšom zmysle, pričom slova v “širšom zmysle”

sa vynechávajú. Ak má argument t fyzikálny význam času, potom argument $\tau[s]$ je časové oneskorenie. Ak má argument t fyzikálny význam dĺžky (zvyčajne sa označuje l), potom argument τ (zvyčajne sa označuje $\lambda[m]$) je dráhové oneskorenie.

Príklady

Pr.4.1

Určte vlastnosti korelačnej funkcie $R_x(\tau)$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahov (4.3) až (4.6) a na základe riešenia príkladu 2.4 dostaneme:

$$R_x(0) = M[X(t) X(t+\tau)] = M[X(t) X(t)] = D_x + m_x^2.$$

Keďže proces $X(t)$ je náhodný proces, závislosť medzi $X(t)$ a $X(t+\tau)$ sa zoslabuje, čo možno vyjadriť vzťahom:

$$\begin{aligned} R_x(\infty) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} M[X(t) X(t+\tau)] = \\ &= M[X(t)] \lim_{\tau \rightarrow \infty} M[X(t+\tau)] = m_x^2. \end{aligned}$$

Porovnaním získaných vzťahov dostaneme vzťah pre rozptyl D_x :

$$D_x = R_x(0) - R_x(\infty).$$

Na základe vzťahu (4.2) môžeme ukázať, že korelačná funkcia $R_x(\tau)$ je párna:

$$R_x(\tau) = M[X(t) X(t+\tau)] = M[X(t-\tau) X(t)] = R_x(-\tau).$$

Ohraničenosť korelačnej funkcie $R_x(\tau)$ môžeme ukázať úpravou vzťahu:

$$M\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} \geq 0,$$

$$M[X(t)^2 \pm 2 X(t) X(t+\tau) + X(t+\tau)^2] \geq 0,$$

$$[2 R_x(0) \pm 2 R_x(\tau)] \geq 0,$$

$$R_x(0) \geq R_x(\tau).$$

Pr.4.2

Ukážte, že pre normovanú korelačnú funkciu $r_x(\tau)$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$ platí nerovnosť:

$$|r_x(\tau)| \leq 1.$$

Riešenie.

Analogicky ako v príklade 4.1 je:

$$K_x(0) = M[X_c(t) X_c(t+\tau)] = M[X_c(t)^2] = D_x.$$

$$K_x(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} M[X_c(t) X_c(t+\tau)] = 0.$$

$$\begin{aligned} & M\{[X_c(t) \pm X_c(t+\tau)]^2\} = \\ & = M[X_c(t)^2 \pm 2 X_c(t) X_c(t+\tau) + X_c(t+\tau)^2] = 2 K_x(0) \pm 2 K_x(\tau) \geq 0, \end{aligned}$$

$$D_x \geq K_x(\tau),$$

$$1 \geq |r_x(\tau)|.$$

Pr.4.3

Ukážte, že pre korelačnú funkciu $R_{xy}(\tau)$ stacionárnych náhodných procesov $X(t)$ a $Y(t)$ platí nerovnosť:

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_x(0) + R_y(0)].$$

Riešenie.

Obdobne ako v príklade 4.1 je:

$$M\{[X(t) \pm Y(t+\tau)]^2\} \geq 0,$$

$$R_x(0) \pm 2 R_{xy}(\tau) + R_y(0) \geq 0,$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_x(0) + R_y(0)].$$

Pr.4.4

Ukážte, že pre korelačnú funkciu $R_{xy}(\tau)$ stacionárnych náhodných procesov $X(t)$ a $Y(t)$ platí nerovnosť:

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0) R_y(0)}.$$

Riešenie.

Obdobne ako v príklade 4.1 je:

$$M\{[a X(t) \pm b Y(t+\tau)]^2\} \geq 0,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 R_x(0) \pm 2 \left(\frac{a}{b}\right) R_{xy}(\tau) + R_y(0) \geq 0.$$

Aby mohla byť uvedená nerovnosť splnená, výraz $\left(\frac{a}{b}\right)$ musí mať komplexnú hodnotu, a potom musí byť splnená nerovnosť:

$$[2 R_{xy}(\tau)]^2 - 4 R_x(0) R_y(0) \leq 0,$$

na základe ktorej vyplynie hľadaná nerovnosť:

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0) R_y(0)}.$$

Pr.4.5

Ukážte, že pre normovanú korelačnú funkciu $r_{xy}(\tau)$ stacionárnych náhodných procesov $X(t)$ a $Y(t)$ platí nerovnosť:

$$|r_{xy}(\tau)| \leq 1.$$

Riešenie.

Obdobne ako v príklade 4.1 je:

$$\begin{aligned} M\left\{\left[\frac{X_c(t)}{\sigma_x} \pm \frac{Y_c(t+\tau)}{\sigma_y}\right]^2\right\} &= M\left[\frac{X_c(t)^2}{D_x} \pm 2 \frac{X_c(t) Y_c(t+\tau)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{Y_c(t+\tau)^2}{D_y}\right] = \\ &= [2 \pm 2 \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}] = [2 \pm 2 r_{xy}(\tau)] \geq 0, \end{aligned}$$

z čoho vyplynie:

$$|r_{xy}(\tau)| \leq 1.$$

Pr.4.6

Ukážte, že pre korelačnú funkciu $R_{xy}(\tau)$ stacionárnych náhodných procesov $X(t)$ a $Y(t)$ platí rovnosť:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau).$$

Riešenie.

Obdobne ako v príklade 4.1 je:

$$R_{yx}(\tau) = M[X(t) Y(t+\tau)] = M[X(t-\tau) Y(t)] = R_{yx}(-\tau).$$

Pr.4.7

Určte hodnotu normovanej korelačnej funkcie $r_{yx}(\tau)$ pre $\tau=0$ stacionárnych náhodných procesov $Y(t)$ a $X(t)$, ktoré sú viazané lineárnym vzťahom:

$$Y(t) = a X(t) + b.$$

Riešenie.

Na základe vzťahov (3.1) až (3.6) a (4.10) dostaneme:

$$m_y = M[Y(t)] = M[a X(t) + b] = a m_x + b,$$

$$Y_c(t) = Y(t) - m_y = a X(t) + b - (a m_x + b) = a X_c(t),$$

$$K_{yx}(\tau) = M[Y_c(t) X_c(t+\tau)] = M[a X_c(t) X_c(t+\tau)] = a K_x(\tau),$$

$$K_y(\tau) = M[Y_c(t) Y_c(t+\tau)] = M[a^2 X_c(t) X_c(t+\tau)] = a^2 K_x(\tau),$$

$$D_y = K_y(0) = a^2 K_x(0) = a^2 D_x,$$

$$r_{yx}(0) = \frac{K_{yx}(0)}{\sigma_y \sigma_x} = \frac{a D_x}{\sqrt{D_y} \sqrt{D_x}} = \frac{a D_x}{/a D_x/} = \pm 1.$$

Pr.4.8

Určte hodnotu normovanej korelačnej funkcie $r_{x \&}(\tau)$ pre $\tau=0$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahov (3.1) až (3.6), (4.10) a riešenia príkladu 3.4 je:

$$K_{x,x}(\tau) = M[X_c(t) X_c(t+\tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau} M[X_c(t) X_c(t')] = \frac{\partial}{\partial \tau} K_x(\tau).$$

Na základe riešenia príkladu 4.1 je $K_x(0) = \max[K_x(\tau)]$, a preto $\frac{\partial}{\partial \tau} K_x(0) = 0$, na základe čoho je:

$$r_{x,x}(0) = 0.$$

Pr.4.9

Určte hodnotu normovanej korelačnej funkcie $r_{zx}(\tau)$ pre $\tau = 0$ ak platí:

$$Z(t) = a X(t) + b Y(t),$$

kde a, b sú konštanty a $X(t), Y(t)$ sú náhodné stacionárne procesy

- a) lineárne závislé,
- b) nezávislé.

Riešenie.

Na základe vzťahov (3.1-6) a (4.10) dostaneme:

$$m_z = M[Y(t)] = M[a X(t) + b Y(t)] = a m_x + b m_y,$$

$$Z_c(t) = Z(t) - m_z = a X(t) + b Y(t) - (a m_x + b m_y) = a X_c(t) + b Y_c(t),$$

$$K_{zx}(\tau) = M[Z_c(t) X_c(t+\tau)] = M\{[a X_c(t) + b Y_c(t)] X_c(t+\tau)\} = a K_x(\tau) + b K_{yx}(\tau),$$

$$K_z(\tau) = M[Z_c(t) Z_c(t+\tau)] = M\{[a X_c(t) + b Y_c(t)][a X_c(t+\tau) + b Y_c(t+\tau)]\} = \\ = a^2 K_x(\tau) + a b [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] + b^2 K_y(\tau),$$

$$D_z = K_z(0) = a^2 D_x + 2 a b K_{yx}(0) + b^2 D_y,$$

$$r_{zx}(0) = \frac{K_{zx}(0)}{\sigma_z \sigma_x} = \frac{a D_x + b K_{yx}(0)}{\sqrt{a^2 D_x^2 + 2 a b K_{yx}(0) D_x + b^2 D_y D_x}}$$

a) Na základe riešenia príkladu 4.7 dostaneme:

$$Y(t) = c X(t) + d,$$

$$K_{yx}(0) = c K_x(0) = c D_x,$$

$$K_y(\tau) = D_y = a^2 K_x(0) = a^2 D_x,$$

$$r_{zx}(0) = \frac{a D_x + b c D_x}{\sqrt{a^2 D_x^2 + 2 a b c D_x D_x + b^2 c^2 D_x D_x}} = \pm 1.$$

b) V prípade nezávislosti $X(t)$ a $Y(t)$ (pozri príklad 2.5) dostaneme:

$$r_{zx}(0) = \frac{a D_x}{\sqrt{a^2 D_x^2 + b^2 D_y D_x}} / < 1.$$

Pr.4.10

Určte kovariančnú funkciu $K_{yx}(\tau)$ a rozptyl D_y , ak:

$$Y(t) = X(t) + a(t),$$

kde $X(t)$ je stacionárny proces a $a(t)$ je nenáhodná funkcia.

Riešenie.

Analogicky ako v príklade 2.1 dostaneme:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[X(t) + a(t)] = m_x + a(t),$$

$$Y_c(t) = Y(t) - m_y = X(t) + a(t) - [m_x + a(t)] = X_c(t),$$

$$K_{yx}(\tau) = M[Y_c(t) X_c(t+\tau)] = M[X_c(t) X_c(t+\tau)] = K_x(\tau),$$

$$K_y(\tau) = M[Y_c(t) Y_c(t+\tau)] = M[X_c(t) X_c(t+\tau)] = K_x(\tau),$$

$$D_y = K_x(0) = D_x.$$

Pr.4.11

Určte kovariančnú funkciu $K_{yx}(t, \tau)$ a rozptyl $D_y(t)$ ak:

$$Y(t) = a(t) X(t),$$

kde $X(t)$ je stacionárny proces a $a(t)$ je nenáhodná funkcia.

Riešenie.

Analogicky ako v príklade 2.1 dostaneme:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[a(t) X(t)] = a(t) m_x,$$

$$Y_c(t) = Y(t) - m_y = a(t) X(t) - [a(t) m_x] = a(t) X_c(t),$$

$$K_{yx}(t, \tau) = M[Y_c(t) X_c(t+\tau)] = M[a(t) X_c(t) X_c(t+\tau)] = a(t) K_x(\tau),$$

$$K_y(t, \tau) = M[Y_c(t) Y_c(t+\tau)] = M[a(t) a(t+\tau) X_c(t) X_c(t+\tau)] = a(t) a(t+\tau) K_x(\tau),$$

$$D_y(t) = K_x(t, 0) = a(t)^2 D_x.$$

5. Stacionárne ergodické náhodné procesy

Keď štatistické charakteristiky ľubovoľnej realizácie náhodného procesu sa zhodujú so štatistickými charakteristikami náhodného procesu, tak náhodný proces je ergodický.

Charakteristiky strednú hodnotu m_x , rozptyl D_x , kovariančné funkcie $K_x(\tau)$, $K_{xy}(\tau)$, korelačné funkcie $R_x(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ stacionárneho ergodického náhodného procesu možno určiť pomocou jedinej realizácie náhodného procesu, pričom platí:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt, \quad (5.1)$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)^2 dt, \quad (5.2)$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_c(t) X_c(t+\tau) dt, \quad (5.3)$$

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_c(t) Y_c(t+\tau) dt, \quad (5.4)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X(t+\tau) dt, \quad (5.5)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) Y(t+\tau) dt. \quad (5.6)$$

Príklady

Pr.5.1

Určte hodnotu kovariančnej funkcie $K_z(\tau)$ pre rastúce τ procesov $X(t) = A \sin \omega t$, ktorý je nenáhodný proces a $Y(t)$, ktorý je stacionárny ergodický náhodný proces, ak platí:

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 4.9, vzťahov (5.1-4) a nezávislosti procesov $X(t)$ a $Y(t)$ dostaneme:

$$K_z(\tau) = M[Z_c(t) Z_c(t+\tau)] = M\{[X_c(t) + Y_c(t)][X_c(t+\tau) + Y_c(t+\tau)]\} = \\ = K_x(\tau) + K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) + K_y(\tau) = K_x(\tau) + K_y(\tau),$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin \omega t A \sin \omega(t+\tau) dt = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{A^2}{2} \{\cos[\omega t - \omega(t+\tau)] - \cos[\omega t + \omega(t+\tau)]\} dt = \\ = \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cos \omega \tau - \cos \omega(2t+\tau)] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau.$$

Na základe riešenia príkladu 4.1 vyplýva, že pri raste časového oneskorenia τ hodnoty kovariančnej funkcie $K_y(\tau)$ stacionárneho náhodného procesu $Y(t)$ klesajú. Z toho vyplýva, že od určitej hodnoty τ v $K_z(\tau)$ prevláda príspevok $K_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau$ oproti zanikajúcemu príspevku $K_y(\tau)$.

Pr.5.2

Určte hodnotu normovanej korelačnej funkcie $r_{yx}(\tau)$ pre $\tau=0$ závislých stacionárnych ergodických náhodných procesov $Y(t)$ a $X(t)$, keď platí:

$$X(t) = \cos(\omega t + \varphi), Y(t) = \sin(\omega t + \varphi), X(t)^2 + Y(t)^2 = 1 \text{ a } \varphi \text{ je náhodná veličina.}$$

Riešenie.

Na základe vzťahu (5.4) dostaneme:

$$K_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega t + \varphi) \cos[\omega(t+\tau) + \varphi] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2} \{ \sin[\omega t + \varphi - \omega(t+\tau) - \varphi] + \sin[\omega t + \varphi + \omega(t+\tau) + \varphi] \} dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2} [\sin(-\omega\tau) + \sin(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi)] dt = -\frac{1}{2} \sin\omega\tau.
\end{aligned}$$

$$r_{yx}(0) = \frac{K_{yx}(0)}{\sigma_y \sigma_x} = \frac{0}{\sigma_y \sigma_x} = 0.$$

6. Charakteristiky náhodných procesov vo frekvenčnej oblasti

Frekvenčnú štruktúru procesov (polí) $x(t)$ ako rozklad funkcie $x(t)$ podľa uhlovej frekvencie (vlnového čísla) ω opisujú charakteristiky vo frekvenčnej oblasti. V prípade, ak je splnená podmienka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

existuje Fourierová transformácia $X(i\omega)$ [resp. $X(if)$] funkcie $x(t)$, pre ktorú je:

$$X(i\omega) = a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ic\omega t} dt, \quad x(t) = b \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{ic\omega t} d\omega,$$

kde je:

$$a b = \frac{1}{2\pi}.$$

Potom napríklad je:

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \text{resp.} \quad X(if) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (6.1.a-b)$$

a inverzná Fourierová transformácia $X(i\omega)$ [resp. $X(if)$] funkcie $x(t)$ je:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{resp.} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(if) e^{i2\pi ft} df, \quad (6.2.a-b)$$

Spektrálna výkonová hustota $S_x(\omega)$ funkcie $x(t)$ je definovaná ako Fourierová transformácia korelačnej funkcie $R_x(\tau)$ a tak je:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \text{resp.} \quad S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (6.3.a-b)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad \text{resp.} \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{i2\pi f\tau} df, \quad (6.4.a-b)$$

Spektrálna výkonová hustota (vzájomná) $S_{xy}(i\omega)$ funkcií $x(t)$ a $y(t)$ je definovaná ako Fourierová transformácia korelačnej funkcie $R_{xy}(\tau)$ a tak je:

$$S_{xy}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \text{resp.} \quad S_{xy}(if) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (6.5.a-b)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad \text{resp.} \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df, \quad (6.6.a-b)$$

Koherenčná funkcia $\gamma_{xy}(\omega)$ funkcií $x(t)$ a $y(t)$ je:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(i\omega)|^2}{S_x(\omega) S_y(\omega)}. \quad (6.7)$$

Príklady

Pr.6.1

Ukážte, že platí vzťah:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega - m_x^2$$

medzi rozptylom D_x a spektrálnou výkonovou hustotou $S_x(\omega)$ stacionárneho náhodného procesu $x(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.4.a) a riešenia príkladu 2.4 dostaneme:

$$\begin{aligned} D_x &= M[x(t)^2] - m_x^2 = R_x(0) - m_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega 0} d\omega - m_x^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega - m_x^2. \end{aligned}$$

Pr.6.2

Vyjadrite spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ funkcie $x(t)$ pomocou Fourierovej transformácie $X(i\omega)$ funkcie $x(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahov (6.1.a) a (6.2.a) dostaneme:

$$\begin{aligned} D_x + m_x^2 &= M[x(t)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(i\omega) \bar{X}(i\omega) d\omega = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(i\omega)|^2 d\omega.$$

Porovnaním získaného vzťahu so vzťahom ukázaným v príklade 6.1 dostaneme:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(i\omega)|^2.$$

Pr.6.3

Ukážte, že spektrálna výkonová hustota $S_x(\omega)$ funkcie $x(t)$ sa rovná Fourierovej transformácii korelačnej funkcie $R_x(\tau)$ využitím vzťahu, ktorý bol ukázaný v príklade 6.2.

Riešenie.

Na základe vzťahov (6.1.a) a (6.2.a) a riešenia príkladu 6.2 dostaneme:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(i\omega) \bar{X}(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Pr.6.4

Vyjadrite spektrálnu výkonovú hustotu $S_{yx}(\omega)$ funkcií $y(t)$ a $x(t)$ pomocou Fourierových transformácií $Y(i\omega)$, $X(i\omega)$ funkcií $y(t)$ a $x(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahov (6.1.a) a (6.2.a) dostaneme:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t+\tau) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(i\omega) e^{i\omega(t+\tau)} x(t) d\omega dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{X}(i\omega) Y(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \bar{X}(i\omega) Y(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.
\end{aligned}$$

Porovnaním získaného vzťahu so vzťahom (6.6.a) dostaneme:

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \bar{X}(i\omega) Y(i\omega).$$

Pr.6.5

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ stacionárneho náhodného procesu (bieleho šumu), ktorého korelačná funkcia má tvar Diracovho impulzu:

$$R_x(\tau) = \delta(\tau).$$

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.3.a) je:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} dt.$$

Na základe vzťahu (1.8) je:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \delta(\tau - 0) d\tau = e^{-i\omega \cdot 0} = 1.$$

Pr.6.6

Ukážte, že platí vzťah:

$$S_{xy}(i\omega) = \bar{S}_{yx}(i\omega).$$

Riešenie.

V príklade 6.4 bol ukázaný vzťah, na základe ktorého je:

$$S_{xy}(i\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \bar{X}(i\omega) Y(i\omega).$$

Analogicky sa dá ukázať, že platí aj vzťah:

$$S_{yx}(i\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \bar{Y}(i\omega) X(i\omega).$$

Porovnaním uvedených vzťahov dostaneme hľadaný vzťah:

$$S_{yx}(i\omega) = \bar{S}_{xy}(i\omega).$$

Pr.6.7

Ukážte, že pre koherenčnú funkciu funkcií $x(t)$ a $y(t)$ platí nerovnosť:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1.$$

Riešenie.

V príklade 4.4 bol ukázaný vzťah, na základe ktorého platí:

$$\frac{R_{xy}(0)^2}{R_x(0) R_y(0)} = \frac{(\frac{1}{2\pi})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(i\omega_1) \bar{S}_{xy}(i\omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{(\frac{1}{2\pi})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1) S_y(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2} = \frac{S_{xy}(i\omega)^2}{S_x(\omega) S_y(\omega)} \leq 1,$$

pričom sme zohľadnili vzťah ukázaný v príklade 6.6 a vzťahy (6.4.a) a (6.6.a).

Pr.6.8

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_z(\omega)$ stacionárneho náhodného procesu $Z(t)$, ak platí:

$$Z(t) = a X(t) + b Y(t),$$

kde $X(t)$ a $Y(t)$ sú stacionárne náhodné procesy, pričom su známe ich spektrálne výkonové hustoty $S_x(\omega)$, $S_{xy}(i\omega)$, $S_y(\omega)$ a konštanty a , b .

Riešenie.

V príklade 4.9 bol ukázaný vzťah, na základe ktorého platí:

$$R_z(\tau) = M[Z(t) Z(t+\tau)] = a^2 R_x(\tau) + a b [R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] + b^2 R_y(\tau).$$

Využitím vzťahov (6.3.a) a (6.5.a) a vzťahu z príkladu 6.6 dostaneme vzťah:

$$S_z(\omega) = a^2 S_x(\omega) + a b [S_{xy}(i\omega) + \bar{S}_{xy}(i\omega)] + b^2 S_y(\omega).$$

Pr.6.9

Určte korelačnú funkciu $R_x(\tau)$ stacionárneho procesu (bieleho šumu), ktorého spektrálna výkonová hustota je:

$$S_x(\omega) = S_0.$$

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.4.a) je:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Na základe vzťahu (6.3.a) a (1.8) je:

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_0) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega\tau_0}.$$

Inverznou Fourierovou transformáciou dostaneme vzťah:

$$\delta(\tau - \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau_0} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau - \tau_0)} d\omega.$$

Pre náš prípad $\tau_0 = 0$ dostaneme vzťah:

$$R_x(\tau) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-0)} d\omega = S_0 \delta(\tau).$$

Na základe vzťahu (1.8) je:

$$S_x(\omega) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \delta(\tau - 0) d\tau = S_0 e^{-i\omega 0} = S_0.$$

Pr.6.10

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ náhodného procesu $X(t)$ ak:

$$X(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

kde φ je náhodná veličina.

Riešenie.

Najskôr určíme korelačnú funkciu $R_x(\tau)$ náhodného procesu $X(t)$:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin(\omega_0 t + \varphi) A \sin[\omega_0(t + \tau) + \varphi] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{A^2}{2} \{ \cos[\omega_0 t + \varphi - \omega_0(t+\tau) - \varphi] - \cos[\omega_0 t + \varphi + \omega_0(t+\tau) + \varphi] \} dt = \\
&= \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cos(-\omega_0 \tau) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi)] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.
\end{aligned}$$

Na základe vzťahu (6.3.a) je:

$$\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}) e^{-i\omega \tau} d\tau = \\
&= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} + e^{-i(\omega_0 + \omega)\tau}] d\tau = 2\pi \frac{A^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].
\end{aligned}$$

Pr.6.11

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$ s korelačnou funkciou:

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|},$$

kde $\alpha > 0$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.3.a) je:

$$\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega \tau} d\tau = D_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|\tau| + i\omega \tau)} d\tau = \\
&= D_x \left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau \right] = D_x \left(\frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} \right) = D_x \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Pr.6.12

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$ s korelačnou funkciou:

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha/|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

kde $\alpha > 0$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.3.a) je:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha/|\tau|} \cos \omega_0 \tau e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha/|\tau|} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_x}{2} \left\{ \int_0^{\infty} [e^{(-\alpha+i\omega_0-i\omega)\tau} + e^{(-\alpha-i\omega_0-i\omega)\tau}] d\tau + \int_{-\infty}^0 [e^{(\alpha+i\omega_0-i\omega)\tau} + e^{(\alpha-i\omega_0-i\omega)\tau}] d\tau \right\} = \\ &= \frac{D_x}{2} \left[\frac{1}{\alpha-i(\omega_0-\omega)} + \frac{1}{\alpha+i(\omega_0+\omega)} + \frac{1}{\alpha+i(\omega_0-\omega)} + \frac{1}{\alpha-i(\omega_0+\omega)} \right] = \\ &= D_x \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

Pr.6.13

Určte spektrálnu výkonovú hustotu $S_{\dot{X}}(\omega)$ derivácie $\dot{X}(t)$ stacionárneho náhodného procesu $X(t)$ pomocou spektrálnej výkonovej hustoty $S_x(\omega)$ náhodného procesu $X(t)$.

Riešenie.

Najskôr na základe riešenia príkladu 4.8 určíme korelačnú funkciu $R_{\dot{X}}(\tau)$ stacionárneho náhodného procesu $\dot{X}(t)$:

$$R_{\dot{X}}(\tau) = R_{\dot{X}}(t, t') = \frac{\partial^2 R_x(t'-t)}{\partial t \partial t'} = \frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial \tau^2}.$$

Na základe vzťahu (6.4.a) je:

$$R_{\mathfrak{X}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathfrak{X}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

ale aj:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Úpravou dostaneme:

$$\frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{-\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$R_{\mathfrak{X}}(\tau) = \frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{-\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Porovnaním vzťahov pre vyjadrenie korelačnej funkcie $R_{\mathfrak{X}}(\tau)$ dostaneme vzťah:

$$S_{\mathfrak{X}}(\omega) = -\omega^2 S_x(\omega).$$

Pr.6.14

Určte Fourierovu transformáciu $\mathfrak{X}(i\omega)$ funkcie $\mathfrak{X}(t)$, ak poznáme Fourierovu transformáciu $X(i\omega)$ funkcie $x(t)$.

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.2.a) je:

$$\mathfrak{X}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{X}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

ale aj:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Úpravou dostaneme:

$$\mathfrak{X}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Porovnaním vzťahov pre vyjadrenie funkcie $\mathfrak{X}(t)$ dostaneme vzťah:

$$\mathfrak{X}(i\omega) = i\omega X(i\omega).$$

7. Markovove procesy

Náhodný proces, ktorého charakteristiky v ľubovoľnom časovom okamihu sú závislé iba od charakteristík v určitom predchádzajúcom okamihu, sa nazýva Markovov náhodný proces.

Pre n - rozmernú hustotu $f(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1)$ náhodného procesu platí:

$$\begin{aligned} & f(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = \\ & = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) f(x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1), \end{aligned} \quad (7.1)$$

pre n - rozmernú hustotu $f(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1)$ Markovového procesu platí:

$$f(x_n, t_n, x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) f(x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1), \quad (7.2)$$

kde $f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ je podmienená hustota pravdepodobnosti, ktorá vyjadruje, že hodnota procesu $x(t)$ sa bude v čase t_n rovnať x_n , keď v čase t_{n-1} sa rovnala x_{n-1} . Pre podmienenú hustotu pravdepodobnosti platí:

$$f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) \geq 0, \quad (7.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) dx_j = 1, \quad (7.4)$$

V prípade Markovového procesu platí:

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | z, \tau) f(z, \tau | x_0, t_0) dz. \quad (7.5)$$

Príklady

Pr.7.1

Nájdite vzťah, pomocou ktorého možno určiť podmienenú hustotu pravdepodobnosti $f(x, t | x_0, t_0)$ Markovového procesu s nezávislými premennými x_0, t_0 (prvá spätná Kolmogorovova rovnica).

Riešenie

Proces $X(t)$ považujeme za spojitý [ak pri malých časových intervaloch môžu len s malou pravdepodobnosťou vzniknúť značné (čo do veľkosti) prírastky] a do vzťahu (7.5) dosadíme vzťah $\tau = t_0 + \Delta t$, ($\Delta t > 0$). Potom:

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | z, t_0 + \Delta t) f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz.$$

Rozložením funkcie $f(x, t | z, t_0 + \Delta t)$ do Taylorovho radu v okolí $z = x_0$ dostaneme:

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, t | x_0, t_0 + \Delta t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_0} (z - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} (z - x_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} (z - x_0)^3 + \dots] f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz.$$

Na základe vzťahu (7.4) je:

$$\begin{aligned} & f(x, t | x_0, t_0) - [f(x, t | x_0, t_0 + \Delta t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_0} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0) f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^2 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x_0)^3 f(z, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) dz + \dots, \\ & 0 = \frac{\partial f}{\partial x_0} + a \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{1}{6} c \frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3} + \dots, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} a(x_0, t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)]}{\Delta t}, \\ b(x_0, t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)^2]}{\Delta t}, \\ c(x_0, t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z - x_0)^3]}{\Delta t}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pr.7.2

Nájdite vzťah, pomocou ktorého možno určiť podmienenú hustotu pravdepodobnosti $f(x, t | x_0, t_0)$ Markovového procesu s nezávislými premennými x, t (druhá priama Kolmogorovova rovnica).

Riešenie

Nech $\varphi(x)$ je ľubovoľná spojitá diferencovateľná (do druhého poriadku) funkcia $X(t)$, na hraniciach definičného oboru $\langle a, b \rangle$ rovná nule (spolu s prvými dvoma deriváciami). S ohľadom na analógiu s normálnym rozdelením uvažujeme definičný obor $\langle \infty, \infty \rangle$. Do vzťahu (7.5) dosadíme vzťah $t = t + \Delta t$, $\tau = t$, a potom:

$$f(x, t + \Delta t | x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) dz.$$

Funkciu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} \varphi(x) dx$ pri zohľadnení vzťahu (7.5) vyjadríme v tvare:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) dz - f(x, t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) dz] \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) f(z, t | x_0, t_0) dz - f(x, t | x_0, t_0) \right] \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t | x_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t + \Delta t | z, t) \varphi(x) dx dz - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, t_0) \varphi(x) dx = \end{aligned}$$

Zámenou premenných x, z dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t | x_0, t_0) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) \varphi(z) dz - \varphi(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Rozložením funkcie $\varphi(z)$ do Taylorovho radu v okolí $z=x$ zanedbajúc členy s vyššími mocninami dostaneme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) \varphi(z) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t + \Delta t | x, t) [\varphi(x) + \varphi'(x)(x-z) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(x-z)^2] dz.$$

Zohľadnením vzťahu (7.3) a vlastností derivácií funkcie $\varphi(x)$ na hraniciach jej definičného oboru (integráciou per partes) dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial a} \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, t | x_0, t_0) [\varphi'(x) a(x, t) + \frac{1}{2}\varphi''(x) b(x, t)]] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\frac{\partial f a}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (f b)}{\partial x^2}] \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f a}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (f b)}{\partial x^2} = 0,$$

kde koeficienty $a(x, t)$, $b(x, t)$ majú analogický tvar ako v príklade 7.1, len závisia od x , t .

Pr.7.3

Nájdite vyjadrenie druhej Kolmogorovovej rovnice pre $2n$ -rozmerný Markovov proces tvorený náhodnými procesmi $\mathbf{q}(t) = \{q_j(t)\}$, $\Phi(t) = \{\dot{q}_j(t)\}$, $j=1, 2, \dots, n$, pre ktoré je:

$$\Phi(t) = \varphi[\mathbf{q}(t), \Phi(t)] + \mathbf{f}(t),$$

kde $\mathbf{f}(t) = \{f_j(t)\}$, $j=1, 2, \dots, n$, sú centrované náhodne procesy s vlastnosťami bieleho šumu ($m_{ff} = 0$, $K_{ffkk}(\tau) = A_{jk} \delta(\tau)$, $j, k=1, 2, \dots, n$).

Riešenie

K vyjadreniu druhej Kolmogorovovej rovnice pre $2n$ -rozmerný Markovov proces v tvare:

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial (f a_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial^2 (f b_{jk})}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

ktorej vyhovuje $2n$ -rozmerná podmienená hustota pravdepodobnosti $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t | x_{10}, x_{20}, \dots, x_{2n0}, t_0)$, je potrebné určiť koeficienty $a_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t)$ a $b_{jk}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t)$.

Zavedením vektora $\mathbf{x}(t)$ v tvare:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix},$$

platí:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varphi[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{f}(t),$$

pričom na základe riešenia príkladov 7.1-2 a v prípade malej hodnoty je:

$$z_j - x_j = \int_t^{t+\Delta t} [\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) + f_j(t)] dt = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} f_j(t) dt,$$

$$a_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[z_j - x_j]}{\Delta t} = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m_f(t) dt =$$

$$= \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t),$$

$$b_{jk} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[(z_j - x_j)(z_k - x_k)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\varphi_j \varphi_k \Delta t^2 + \varphi_j \Delta t \int_t^{t+\Delta t} m_k(t) dt + \varphi_k \Delta t \int_t^{t+\Delta t} m_f(t) dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} K_{ffk}(t_1, t_2) dt_1 dt_2] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} K_{ffk}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} A_{jk} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = A_{jk}.$$

III. Náhodné kmitanie lineárnych sústav

Matematický model opisujúci kmitanie lineárnej sústavy je daný lineárnou vektorovou obyčajnou nehomogénnou diferenciálnou rovnicou:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde $\mathbf{q}(t)$ a $\mathbf{f}(t)$ sú n - rozmerné vektory zovšeobecných výchyliek a síl v čase t . Matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} sú štvorcové matice stupňa n reprezentujúce fyzikálne parametre sústavy. Sústavy, ktorých matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} sú nezávislé na čase t , sú sústavy s konštantnými koeficientami. V ďalšom, ak nebude výslovne povedané inak, sa budeme zaoberať sústavami s konštantnými koeficientami.

Pre vektor zovšeobecných výchyliek platí:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_v(t) + \mathbf{q}_p(t),$$

kde vektor $\mathbf{q}_v(t)$ je všeobecným riešením homogénnej rovnice opisujúcim voľné kmitanie sústavy, pri nenulových začiatočných podmienkach. Vektor $\mathbf{q}_p(t)$ je partikulárnym riešením nehomogénnej rovnice opisujúcim vynútené kmitanie sústavy, pri ľubovoľných začiatočných podmienkach.

V prípade, ak na vstupe do lineárnej sústavy je $\mathbf{f}(t)$ náhodný proces s normálnym rozdelením, tak aj na výstupe zo sústavy bude $\mathbf{q}(t)$ náhodný proces s normálnym rozdelením.

8. Voľné kmitanie sústav pri náhodných začiatočných podmienkach

V prípade zjednodušujúcich predpokladov [matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} sú symetrické, sústava má jednoduchú štruktúru, je nepretlmená, matica \mathbf{B} je proporcionálna ($\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$)] vektor opisujúci voľné kmitanie sústavy je:

$$\mathbf{q}_v(t) = \{q_{vj}(t)\} = \mathbf{V} (e^{\mathbf{S}t} \mathbf{a} + e^{\bar{\mathbf{S}}t} \mathbf{b}), \quad (8.1.a)$$

$$q_{vj}(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk} (a_k e^{s_k t} + b_k e^{\bar{s}_k t}), \quad (8.1.b)$$

kde matice $V = \{v_{jk}(t)\}$ a $S = \text{diag}(s_j), j, k=1, 2, \dots, n$, reprezentujú modálne a spektrálne vlastnosti sústavy, ktoré možno vypočítať riešením problému vlastných čísiel:

$$(M s^2 + K) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (8.2)$$

pričom platí:

$$V^T M V = I, \quad (8.3)$$

$$V^T B V = 2 \Delta = \text{diag}(2\delta_j), \quad (8.4)$$

$$V^T K V = \Omega_o^2 = \text{diag}(\omega_{oj}^2), \quad (8.5)$$

$$s_j = -\delta_j + \sqrt{\omega_{oj}^2 - \delta_j^2}. \quad (8.6)$$

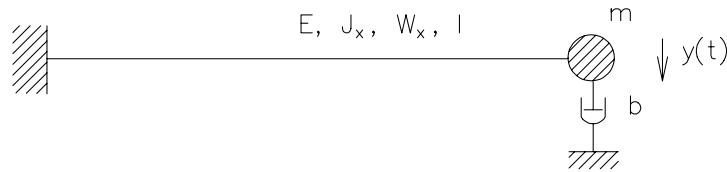
Prvky $a_j, b_j, j=1, 2, \dots, n$, vektorov \mathbf{a}, \mathbf{b} sú konštanty, ktoré sú určené začiatočnými podmienkami $\mathbf{q}_v(0) = \mathbf{q}_{v0}, \dot{\mathbf{q}}_v(0) = \dot{\mathbf{q}}_{v0}$.

Príklady

Pr.8.1

S presnosťou 1% nájdite maximálnu hodnotu maximálneho napätia $\max(\sigma_{max})$ v nosníku zanedbateľnej hmotnosti s materiálovými a geometrickými charakteristikami E, b, J_x, W_x, l (modul pružnosti, súčiniteľ viskózneho tlmenia, prierezový moment zotrvačnosti, modul prierezu, dĺžka nosníka) podľa obrázka č. 4 pri náhodných začiatočných podmienkach s normálnym rozdelením, daných strednými hodnotami

m_{y_0} , $m_{\dot{y}_0}$, rozptylmi D_{y_0} , $D_{\dot{y}_0}$ a kovarianciou $K_{y_0 \dot{y}_0}$ začiatočnej výchylky $y(t=0) = y_0$ a rýchlosti $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$ koncového bodu nosníka, v ktorom je umiestnené bremeno s hmotnosťou m zanedbateľných rozmerov.



Obr. č. 4

Riešenie

Pohybová rovnica voľného kmitania bremena je:

$$m \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + k y(t) = 0,$$

kde $k = 3 E J_x / l^3$. Jej riešením dostaneme rovnicu výchylky $y(t)$ koncového bodu nosníka:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\delta t} \left[y_0 (\cos \omega_d t + \frac{\delta}{\omega_d} \sin \omega_d t) + \frac{1}{\omega_d} \dot{y}_0 \sin \omega_d t \right] = \\ &= e^{-\delta t} [y_0 f_1(t) + \frac{1}{\omega_d} \dot{y}_0 f_2(t)], \end{aligned}$$

kde $2\delta = b / m$, $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, $\omega_0^2 = k / m$. Jej využitím dostaneme ako pri riešení príkladov 3.1-2 rovnice pre strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a rozptyl výchylky koncového bodu nosníka $y(t)$:

$$m_{y(t)} = M[y(t)] = e^{-\delta t} [m_{y_0} f_1(t) + \frac{1}{\omega_d} m_{\dot{y}_0} f_2(t)],$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[y(t) y(t')] = \\ &= e^{-\delta(t+t')} \{ D_{y_0} f_1(t) f_1(t') + \frac{1}{\omega_d} K_{y_0 \dot{y}_0} [f_1(t) f_2(t') + f_1(t') f_2(t)] + \frac{1}{\omega_d^2} D_{\dot{y}_0} f_2(t) f_2(t') \}, \end{aligned}$$

$$D_y(t) = M[y(t)^2] = e^{-2\delta t} [D_{y_0} f_1(t)^2 + \frac{2}{\omega_d} K_{y_0} f_1(t) f_2(t) + \frac{1}{\omega_d^2} D_{f_0} f_2(t)^2].$$

Maximálne napätie $\sigma_{max}(t)$ v mieste votknutia nosníka je:

$$\sigma_{max}(t) = a y(t).$$

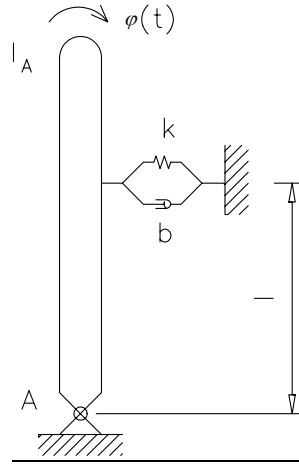
kde $a = 3 E J_x / (W_x l^2)$. Na základe riešenia príkladu 1.12 dostaneme maximálnu hodnotu napätia v mieste votknutia v ľubovoľnom časovom okamihu:

$$\max[\sigma_{max}(t)] = a m_y(t) + 3 a \sigma_y(t).$$

Určením hodnoty času t_m , pre ktorý má funkcia $\max[\sigma_{max}(t)]$ maximálnu hodnotu, dostaneme hodnotu napätia v nosníku $\max[\sigma_{max}(t_m)]$, ktorá pri daných začiatočných podmienkach nebude prekročená s pravdepodobnosťou viac ako 0,99.

Pr.8.2

Nájdite tuhostné a tlmiace parametre $k_A = k l^2$, $b_A = b l^2$ sústavy s telesom s momentom zotrvačnosti I_A k bodu A podľa obrázka č. 5, tak aby sa teleso pod vplyvom náhodných začiatočných podmienok s normálnym rozdelením, daných strednými hodnotami $m_{\varphi_0} = 0$, $m_{\dot{\varphi}_0}$ a rozptylmi $D_{\varphi_0} = 0$, $D_{\dot{\varphi}_0}$, začiatočných uhlových výchyliek $\varphi(t=0) = \varphi_0$ a rýchlostí $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$, natočila o uhol menší ako φ_d a aby sa uhlové výchylky $\varphi(t)$ sústavy za čas t_k zmenšili d -krát.



Obr. č. 5

Riešenie

Pohybová rovnica voľného kmitania uvedenej sústavy je:

$$I_A \ddot{\varphi}(t) + b_A \dot{\varphi}(t) + k_A \varphi(t) = 0.$$

Na základe riešenia príkladu 8.1 dostaneme vyjadrenie strednej hodnoty a rozptylu uhlovej výchylky telesa $\varphi(t)$ v tvare:

$$m_{\varphi}(t) = M[\varphi(t)] = \frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t} m_{\varphi_0} \sin \omega_d t,$$

$$K_{\varphi}(t, t') = M[\varphi(t) \varphi(t')] = \frac{1}{\omega_d^2} e^{-\delta(t+t')} D_{\varphi_0} \sin \omega_d t \sin \omega_d t',$$

$$D_{\varphi}(t) = \sigma_{\varphi}^2(t) = M[y(t)^2] = \frac{1}{\omega_d^2} e^{-2\delta t} D_{\varphi_0} \sin^2 \omega_d t.$$

kde $2\delta = b_A / I_A$, $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2$, $\omega_o^2 = k_A / I_A$.

Analogicky ako pri riešení príkladu 8.1 maximálnu hodnotu uhlovej výchylky $\varphi_{max}(t)$ v ľubovoľnom časovom okamihu možno nájsť v tvare:

$$\varphi_{max}(t) = \frac{1}{\omega_d} [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}] e^{-\delta t} \sin \omega_d t.$$

V čase $t_m = \pi/(2 \omega_d)$ dosiahne uhlová výchylka telesa maximálne hodnoty, a tak na základe príkladu 1.12 je:

$$\varphi_d > \varphi_{max}(t_m) \cong \frac{1}{\omega_d} [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}], (e^{-\delta t} \cong 1),$$

$$k_A > \left\{ \frac{1}{\varphi_d} [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}] I_A \right\}^2, (\omega_d^2 \cong \omega_o^2).$$

Pre čas t_k platí:

$$t_k = t_{kT} + \Delta t_k = \frac{(2n-1)\pi}{2\omega_d} + \Delta t_k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

na základe čoho je:

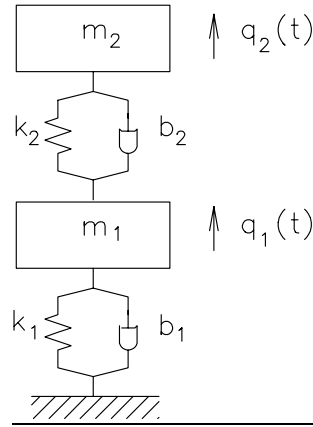
$$\varphi_d d > \frac{1}{\omega_d} [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}] e^{-\delta t_k} \sin \omega_d t_k = \frac{1}{\omega_d} [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}] e^{-\delta t_k},$$

$$\omega_d d > e^{-\delta t_k}, (\varphi_d \cong [m_{\phi_0} + 3 \sigma_{\phi_0}]).$$

Úpravou uvedených vzťahov možno získať hodnotu δ a následne hodnotu b_A .

Pr.8.3

Určte stredné hodnoty m_{qj} a rozptyly D_{qj} výchylek q_j , $j=1,2$ sústavy s parametrami m_j , b_j , k_j , ($b_j = \beta k_j$) podľa obrázka č. 6, ak sústava kmitá pod vplyvom náhodných začiatočných podmienok daných strednými hodnotami a rozptylmi m_{qj0} , D_{qj0} začiatočných výchylek a rýchlostí $q_j(t=0) = 0$, ($j=1,2$), $\phi_1(t=0) = \phi_{10}$, $\phi_2(t=0) = 0$.



Obr. č. 6

Riešenie

Pohybová rovnica voľného kmitania uvedenej sústavy je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0},$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \beta \mathbf{K}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vynásobením rovnice zľava maticou \mathbf{V}^T a vyjadrením vektora $\mathbf{q}(t)$ v tvare $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{v}(t)$ dostaneme (maticu $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_j\} = \{v_{j,k}\}$ nájdeme riešením problému vlastných čísiel v tvare $[\mathbf{K} - \omega_{oj}^2 \mathbf{M}] \mathbf{v}_j(t) = 0$) rovnicu:

$$\ddot{v}_j(t) + 2 \delta_j \dot{v}_j(t) + \omega_{oj}^2 v_j(t) = 0, \quad j=1,2,$$

kde pre maticu \mathbf{V} platia podmienky (8.2-6). Jej riešením dostaneme:

$$v_j(t) = e^{-\delta_j t} (A_j \cos \omega_{dj} t + B_j \sin \omega_{dj} t), \quad j=1,2,$$

kde $\omega_{dj}^2 = \omega_{oj}^2 - \delta_j^2$. Vyjadrením výchyliek $q_j(t)$ a pri zohľadnení začiatočných podmienok analogicky ako pri riešení príkladu 8.1 dostaneme:

$$m_{q_j}(t) = m_{\Phi_0} [e^{-\delta_1 t} f_{j,1}(t) + e^{-\delta_2 t} f_{j,2}(t)], \quad j=1,2,$$

$$D_{q_j}(t) = D_{\Phi_0} [e^{-\delta_1 t} f_{j,1}(t) + e^{-\delta_2 t} f_{j,2}(t)]^2, \quad j=1,2,$$

kde $f_{j,k}(t) = v_{j,k} B_k \sin \omega_{dk} t, j,k=1,2,$

$$\begin{bmatrix} v_{11} \omega_{d1} & v_{12} \omega_{d2} \\ v_{21} \omega_{d1} & v_{22} \omega_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. Nestacionárne vynútené kmitanie sústavy

V prípade rovnakých zjednodušujúcich predpokladov ako v kapitole č. 8 vektor opisujúci vynútené kmitanie sústavy je:

$$\mathbf{q}_p(t) = \{q_{pj}(t)\} = \int_0^t \mathbf{V} (e^{\mathbf{S}(t-\tau)} + e^{\bar{\mathbf{S}}(t-\tau)}) \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (9.1.a)$$

$$\begin{aligned} q_{pj}(t) &= \int_0^t \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_{jk} (e^{s_k(t-\tau)} + e^{\bar{s}_k(t-\tau)}) v_{lk} f_k(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^t h_{jk}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^t h_{jk}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} h_{jk}(\tau) f_k(t-\tau) d\tau, \quad (9.1.b) \end{aligned}$$

kde funkcia $h(t)$ je váhová funkcia (impulzná odozva), ktorá ma fyzikálny význam odozvy $q(t)$ sústavy na Diracov impulz $f(t) = \delta(t)$:

$$q(t) = h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \delta(t-\tau) d\tau.$$

V prípade uvažovanej fyzikálne realizovateľnej sústavy, kedy následok nemôže predbiehať príčinu je:

$$h(t-\tau) = 0, \text{ pre } \tau > t \quad \text{a} \quad h(\tau) = 0, \text{ pre } \tau < 0. \quad (9.2)$$

Lineárna sústava je stabilná ak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (9.3)$$

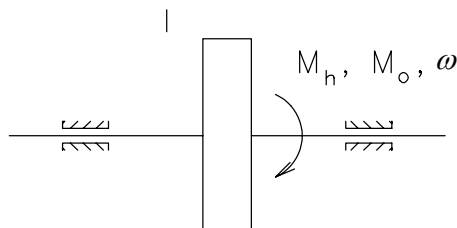
V ďalšom, ak nebude explicitne vyjadrené ináč, budú uvažované lineárne sústavy fyzikálne realizovateľné stabilné s konštantnými koeficientami.

Príklady

Pr.9.1

Hnací moment $M_h(t)$ pohonu podľa obrázka č. 7 náhodne kolíše, pričom poznáme strednú hodnotu $m_f(t)$ a kovariančnú funkciu $K_f(t, t')$ kolísania hnacieho momentu $\Delta M_h(t) = f(t)$. Určte rozptyl $\Delta \omega(t) = q(t)$ kolísania uhlovej rýchlosti poháňaného zariadenia, keď je dané:

- moment zotrvačnosti I poháňaného zariadenia,
- moment od pasívnych odporov $\Delta M_o(t) = f_i(t)$, úmerný uhlovej rýchlosti $\omega(t)$ (k_u je konštanta úmernosti),
- stredná hodnota m_{q_0} a rozptyl D_{q_0} náhodnej začiatočnej podmienky kolísania uhlovej rýchlosti $q(0) = q_0$, pričom kolísanie hnacieho momentu $f(t)$ a začiatočné kolísanie uhlovej rýchlosti q_0 sú nezávislé.



Obr. č. 7

Riešenie.

Pohybová rovnica kolísania uhlovej rýchlosti $\Delta\omega(t) = q(t)$ je:

$$I \frac{dq(t)}{dt} = f(t) - k_u q(t),$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{I} [f(t) - k_u q(t)] = \frac{1}{I} f(t) - k q(t).$$

Riešením tejto rovnice dostaneme:

$$q(t) = q_o e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \frac{1}{I} f(\tau) d\tau.$$

Analogicky ako pri riešení príkladov 3.1-3 a na základe vzťahu (9.1) je:

$$\begin{aligned} m_q(t) &= M[q(t)] = M[q_o e^{-kt} + \frac{1}{I} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} f(\tau) d\tau] = \\ &= M[q_o e^{-kt}] + \frac{1}{I} M\left[\int_0^t e^{-k(t-\tau)} f(\tau) d\tau\right] = m_{q_o} e^{-kt} + \frac{1}{I} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} m_f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Pre centrováný proces $q_c(t)$ kolísania uhlovej rýchlosti platí:

$$q_c(t) = q(t) - m_q(t) = q_{oc} e^{-kt} + \frac{1}{I} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} f_c(\tau) d\tau.$$

Potom na základe nezávislosti $f(t)$ a q_o dostaneme pre kovariančnú funkciu $K_q(t, t')$ kolísania uhlovej rýchlosti vzťah:

$$\begin{aligned}
K_q(t, t') &= M[q_c(t) q_c(t')] = \\
&= M\left\{ \left[q_{oc} e^{-kt} + \frac{1}{I} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} f_c(\tau) d\tau \right] \left[q_{oc} e^{-kt'} + \frac{1}{I} \int_0^{t'} e^{-k(t'-\tau)} f_c(\tau) d\tau \right] \right\} = \\
&= D_{q_0} e^{-kt} + \left(\frac{1}{I}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-k(t+t'-\tau-\tau')} K_f(\tau, \tau') d\tau d\tau'.
\end{aligned}$$

Pr.9.2

Nájdite rozptyl $D_q(t)$ funkcie $q(t)$ ako v predchádzajúcom prípade, ak pri nulových začiatočných podmienkach na bremeno pôsobí:

a) náhodná sila $f(t)$ typu bieleho šumu so strednou hodnotou $m_f(t) = a$ a kovariančnou funkciou $K_f(t, t') = A \delta(t' - t)$,

b) stacionárny centrováný normálny náhodný proces ($m_f = 0$) s korelačnou funkciou $R_f(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}$,

Riešenie

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade a na základe riešenia príkladu 6.9 a vzťahu (9.1) vyjadríme strednú hodnotu $m_q(t)$, kovariančnú funkciu $K_q(t, t')$ a rozptyl $D_q(t)$ funkcie $q(t)$ v tvare:

a)

$$m_q(t) = \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \frac{1}{I} a d\tau = \frac{a}{I k} (1 - e^{-k t}) = \frac{a}{k_u} (1 - e^{-k t}).$$

$$\begin{aligned}
K_q(t, t') &= \left(\frac{1}{I}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-k(t+t'-\tau-\tau')} A \delta(\tau'-\tau) d\tau' d\tau = \\
&= \frac{A}{I^2} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \int_0^{t'} e^{-k(t'-\tau')} \delta(\tau'-\tau) d\tau' d\tau = \frac{A}{I^2} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} e^{-k(t'-\tau)} d\tau = \\
&= \frac{A}{2 I^2 k} [e^{-k(t-t')} - e^{-k(t'+t)}] = \frac{A}{2 I k_u} [e^{-k(t-t')} - e^{-k(t'+t)}].
\end{aligned}$$

$$D_q(t) = K_q(t, t=t) = \frac{A}{2 I k_u} [1 - e^{-2 k t}],$$

b)

$$m_q(t) = \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \frac{1}{I} 0 d\tau = 0.$$

$$\begin{aligned} K_q(t, t') &= \left(\frac{1}{I}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-k(t+t'-\tau-\tau')} A e^{-\alpha/\tau-\tau'} d\tau' d\tau = \\ &= \frac{A}{I^2} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \int_0^{t'} e^{-k(t'-\tau')} e^{-\alpha/\tau-\tau'} d\tau' d\tau, \end{aligned}$$

kde v prípade $t' > t$ platí:

$$\begin{aligned} K_q(t, t')_p &= \frac{A}{I^2} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} \left[\int_0^{\tau} e^{-k(t'-\tau')} e^{-\alpha(\tau-\tau')} d\tau' + \int_0^{t'} e^{-k(t'-\tau')} e^{-\alpha(\tau'-\tau)} d\tau' \right] d\tau = \\ &= \frac{A}{I^2} \left\{ \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k+\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \right) [e^{-k(t'-t)} - e^{-k(t'+t)}] + \frac{1}{k^2-\alpha^2} [e^{-k(t'+t)} - e^{-kt'-\alpha t} + e^{-k(t'-t)} - e^{-kt-\alpha t'}] \right\}. \end{aligned}$$

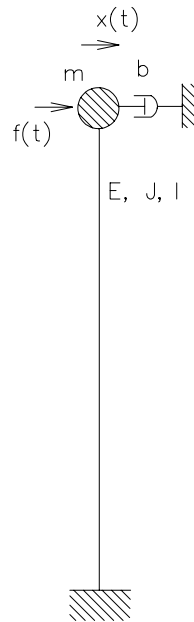
Zohľadnením aj prípadu $t < t'$ kovariančná funkcia $K_q(t, t')$ a rozptyl $D_q(t)$ je:

$$\begin{aligned} K_q(t, t') &= \frac{A}{I^2} \\ &\left\{ \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k+\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \right) [e^{-k/t'-t} - e^{-k(t'+t)}] + \frac{1}{k^2-\alpha^2} [e^{-k(t'+t)} - e^{-(kt'+\alpha t)} + e^{-k/t'-t} - e^{-(kt+\alpha t')}] \right\}, \end{aligned}$$

$$D_q(t) = K_q(t, t=t) = \frac{A}{I^2 k (k^2 - \alpha^2)} \{-\alpha [1 - e^{-2kt}] + k [1 + e^{-2kt} - 2e^{-(k+\alpha)t}]\}.$$

Pr.9.3

Nájdite rozptyl $D_x(t)$ výchyliek $x(t)$ kmitania bremena zanedbateľných rozmerov s hmotnosťou m , pripojeného k votknutému nosníku podľa obrázka č. 8a so zanedbateľnou hmotnosťou a s materiálovými charakteristikami b, k (analogicky ako v príklade 8.1), ak na bremeno pôsobí náhodná sila $f(t) = a v^2 = a (u t)^2$, kde u je náhodná veličina s Rayleighovým rozdelením.



Obr. č. 8a

Riešenie

Pohybová rovnica vynúteného kmitania bremena je:

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + k x(t) = f(t).$$

Na základe vzťahu (9.1) výchylka $x(t)$ je:

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

kde $2\delta = b / m$, $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2$, $\omega_o^2 = k / m$. Na základe riešenia príkladov 3.1-2 dostaneme rovnice pre strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a rozptyl výchylky bremena $x(t)$ v tvare:

$$m_{x(t)} = \int_0^t h(t-\tau) m_f(\tau) d\tau,$$

$$K_x(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') K_f(\tau, \tau') d\tau d\tau',$$

$$D_x(t) = \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t'-\tau') K_f(\tau, \tau') d\tau d\tau'.$$

Na základe riešenia príkladu 2.8 dostaneme vzťahy:

$$m_f(t) = a t^2 M[u^2] = 2 a t^2 \sigma_u^2,$$

$$K_f(t, t') = M[f_c(t) f_c(t')] = 4 a^2 t^2 t'^2 \sigma_u^4,$$

$$m_x(t) = 2 a \sigma_u^2 \int_0^t h(t-\tau) \tau^2 d\tau,$$

$$K_x(t, t') = 4 a^2 \sigma_u^4 \int_0^t h(t-\tau) \tau^2 d\tau \int_0^{t'} h(t'-\tau') \tau'^2 d\tau',$$

$$D_x(t) = 4 a^2 \sigma_u^4 \left[\int_0^t h(t-\tau) \tau^2 d\tau \right]^2 =$$

$$= 4 a^2 \sigma_u^4 \left(\frac{1}{m \omega_d} \right)^2 \left[\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \tau^2 d\tau \right]^2 =$$

$$= 4 a^2 \sigma_u^4 \left(\frac{1}{m \omega_d} \right)^2 \left[\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \tau^2 d\tau \right]^2 =$$

$$= \left(2 a \sigma_u^2 \frac{1}{m \omega_d} \right)^2 \{ [4 (\omega_d^2 + \delta^2) \omega_d \delta t - (\delta^4 + 2 \omega_d^2 \delta^2 + \omega_d^4) \omega_d t^2 + 2 (\omega_d^2 - 3 \delta^2) \omega_d] -$$

$$- 2 e^{-\delta t} (\delta^3 \sin \omega_d t - 3 \omega_d^2 \delta \sin \omega_d t + 3 \omega_d \delta^2 \cos \omega_d t - \omega_d^3 \cos \omega_d t) \} (\delta^2 + \omega_d^2)^{-3}.$$

Pr.9.4

Nájdite rozptyl $D_x(t)$ výchyliek $x(t)$ kmitania bremena sústavy ako v predchádzajúcom prípade:

a) ak na bremeno pôsobí náhodná sila $f(t) = a H(t)$, kde a je náhodná veličina so strednou hodnotou m_a a s rozptylom D_a , $H(t)$ je Heavisideova funkcia,

b) ak na bremeno pôsobí náhodná sila $f(t)$ typu bieleho šumu so strednou hodnotou $m_f(t) = a$ a kovariančnou funkciou $K_f(t, t') = A \delta(t' - t)$,

c) ak sústava je budená kinematickým budením podľa obrázka č. 8b, pričom pohyb základu je náhodný proces so strednou hodnotou $m_f(t) = 0$ a kovariančnou funkciou $K_f(t, t') = A e^{-\alpha|t-t'|}$.

Riešenie

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a rozptyl výchylky bremena $x(t)$ vyjadríme v tvare:

a)

$$m_x(t) = m_a \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{m_a}{m \omega_d (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d(1 - e^{-\delta t} \cos \omega_d t) - e^{-\delta t} \sin \omega_d t],$$

$$K_x(t, t') = D_a \left(\frac{1}{m \omega_d}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\delta(t'-\tau')} \sin \omega_d(t'-\tau') d\tau d\tau' =$$

$$= D_a \left(\frac{1}{m \omega_d}\right)^2 \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \int_0^{t'} e^{-\delta(t'-\tau')} \sin \omega_d(t'-\tau') d\tau',$$

$$D_x(t) = \frac{D_a}{m^2 \omega_d^2 (\omega_d^2 + \delta^2)^2} [\omega_d(1 - e^{-\delta t} \cos \omega_d t) - e^{-\delta t} \sin \omega_d t]^2.$$

b) Analogicky ako v príklade 9.2 dostaneme:

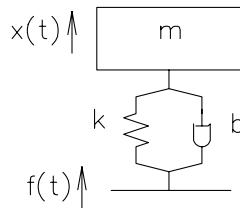
$$m_x(t) = a \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{a}{m \omega_d (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d (1 - e^{-\delta t} \cos \omega_d t) - e^{-\delta t} \sin \omega_d t],$$

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= A \left(\frac{1}{m \omega_d}\right)^2 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\delta(t'-\tau')} \sin \omega_d(t'-\tau') \delta(\tau'-\tau) d\tau' d\tau = \\ &= A \left(\frac{1}{m \omega_d}\right)^2 \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) \left[\int_0^{t'} e^{-\delta(t'-\tau')} \sin \omega_d(t'-\tau') \delta(\tau'-\tau) d\tau' \right] d\tau = \\ &= A \left(\frac{1}{m \omega_d}\right)^2 \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x(t) = K_x(t, t=t) &= \frac{A}{4 m^2 \omega_d^2 \delta (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d^2 + \\ &+ e^{-2\delta t} (\delta^2 \cos 2\omega_d t - \omega_d \delta \sin 2\omega_d t - \omega_d^2 - \delta^2)]. \end{aligned}$$

c) Pohybová rovnica vynúteného kmitania bremena podľa obrázka č. 8b je:



Obr. č. 8b

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + k x(t) = b \dot{f}(t) + k f(t).$$

Na základe riešenia príkladov 9.3 a 3.1-4 dostaneme vyjadrenie strednej hodnoty $m_x(t)$ a kovariančnej funkcie $K_x(t, t')$ výchyliek $x(t)$ v tvare:

$$m_x(t) = k \int_0^t h(t-\tau) m_f(\tau) d\tau + b \int_0^t h(t-\tau) m_{\dot{f}}(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
K_x(t, t') &= (k)^2 \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') K_f(\tau'-\tau) d\tau' d\tau + \\
&+ k b \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') \frac{\partial}{\partial \tau} K_f(\tau'-\tau) d\tau' d\tau + \\
&+ k b \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') \frac{\partial}{\partial \tau'} K_f(\tau'-\tau) d\tau' d\tau + \\
&+ (b)^2 \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau'} K_f(\tau'-\tau) d\tau' d\tau,
\end{aligned}$$

kde $2\delta = b/m$, $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2$, $\omega_o^2 = k/m$, $m \ddot{g}(t) = d/dt [m_f(t)]$, $h(t-\tau) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau)$, $\frac{\partial}{\partial \tau} K_f(\tau'-\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} (A e^{-\alpha(\tau'-\tau)}) = A \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{-\alpha \tau}) = A \frac{\partial \varepsilon / \partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = A \alpha e^{-\alpha(\tau'-\tau)} \text{sign}(\tau'-\tau)$, $\frac{\partial}{\partial \tau'} K_f(\tau'-\tau) = -A \alpha e^{-\alpha(\tau'-\tau)} \text{sign}(\tau'-\tau)$, $\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \tau'} K_f(\tau'-\tau) = A \alpha e^{-\alpha(\tau'-\tau)} [2 \delta(\tau'-\tau) - \alpha]$.

Potom:

$$m_x(t) = 0,$$

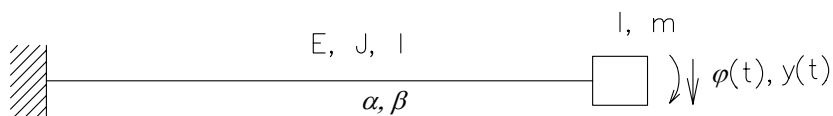
$$\begin{aligned}
K_x(t, t') &= A \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') e^{-\alpha(\tau'-\tau)} [k^2 + 2 b^2 \alpha \delta(\tau'-\tau) - b^2 \alpha^2] d\tau' d\tau = \\
&= A [(k^2 - b^2 \alpha^2) \int_0^t \int_0^{t'} h(t-\tau) h(t'-\tau') e^{-\alpha(\tau'-\tau)} d\tau' d\tau + 2 b^2 \alpha^2 \int_0^t h(t-\tau) h(t'-\tau) d\tau],
\end{aligned}$$

$$D_x(t) = A [(k^2 - b^2 \alpha^2) \int_0^t \int_0^t h(t-\tau) h(t'-\tau') e^{-\alpha(\tau'-\tau)} d\tau' d\tau + 2 b^2 \alpha^2 \int_0^t h(t-\tau)^2 d\tau].$$

Pr.9.5

Nájdite rozptyl $D_y(t)$, $D_\varphi(t)$ výchylek $y(t)$, $\varphi(t)$ kmitania bremena s hmotnosťou m a momentom zotrvačnosti I_T k ťažisku bremena pripojeného k votknutému nosníku (podľa obrázka č. 9) so zanedbateľnou hmotnosťou a známymi materiálovými a

geometrickými charakteristikami E, α, β, J, l (modul pružnosti, koeficienty tlmenia, prierezový moment zotrvačnosti, dĺžka nosníka), ak na nosník pôsobí náhodná sila $f(t)$ a od nej nezávislý náhodný moment $M(t)$.



Obr. č. 9

Riešenie

Pohybová rovnica vynúteného kmitania bremena je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde ($\delta_{11} = l^3/(3 E J)$, $\delta_{12} = \delta_{21} = l^2/(2 E J)$, $\delta_{22} = l/(E J)$ sú Maxwellove vplyvové koeficienty). Potom je:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m \delta_{11} & I_T \delta_{12} \\ m \delta_{21} & I_T \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \delta_{13} + M(t) \delta_{14} \\ f(t) \delta_{23} + M(t) \delta_{24} \end{bmatrix}.$$

Na základe vzťahu (3.1) a (9.1) je:

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \int_0^t h_{jk}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau,$$

kde $q_1(t) = y(t)$, $q_2(t) = \varphi(t)$, $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = M(t)$. Analogicky ako v príklade 8.3 vynásobením úvodnej rovnice zľava maticou \mathbf{V}^T a vyjadrením vektora $\mathbf{q}(t)$ v tvare $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{v}(t)$, dostaneme rovnicu ($\mathbf{V} = \{v_{j,k}\}$):

$$\mathfrak{R}_j(t) + 2 \delta_j \mathfrak{I}_j(t) + \omega_{oj}^2 v_j(t) = \sum_{k=1}^{n=2} v_{j,k} f_k(t), \quad j=1,2,$$

kde pre maticu V platia podmienky (8.2-6). Jej riešením dostaneme:

$$\begin{aligned} v_j(t) &= \int_0^t g_j(t-\tau) \left[\sum_{k=1}^{n=2} v_{j,k} f_k(\tau) \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega_{dj}} \int_0^t e^{-\delta_j(t-\tau)} \sin \omega_{dj}(t-\tau) \left[\sum_{k=1}^{n=2} v_{j,k} f_k(\tau) \right] d\tau, \end{aligned}$$

$$q_j(t) = \sum_{l=1}^{n=2} v_{j,l} v_l = \sum_{k=1}^{n=2} \int_0^t \left[\sum_{l=1}^{n=2} v_{j,l} \frac{1}{\omega_{dl}} e^{-\delta_l(t-\tau)} \sin \omega_{dl}(t-\tau) v_{l,k} \right] f_k(\tau) d\tau,$$

Analogicky ako v riešení príkladu 9.3 strednú hodnotu, kovariančnú funkciu a rozptyl výchylky $y(t)$ a uhlovej výchylky $\varphi(t)$ bremena vyjadríme v nasledujúcom tvare, pričom zohľadníme nezávislosť $f(t)$ a $M(t)$:

$$m_{q_j}(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \int_0^t h_{jk}(t-\tau) m_{f_k}(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} K_{q_j q_l}(t, t') &= \sum_{k=1}^{n=2} \sum_{m=1}^{n=2} \int_0^t \int_0^{t'} h_{jk}(t-\tau) h_{lm}(t'-\tau') K_{f_k f_m}(\tau, \tau') d\tau d\tau' = \\ &= \sum_{k=1}^{n=2} \int_0^t \int_0^{t'} h_{jk}(t-\tau) h_{lk}(t'-\tau') K_{f_k f_k}(\tau, \tau') d\tau d\tau', \end{aligned}$$

$$D_{q_j}(t) = K_{q_j q_j}(t, t) = \sum_{k=1}^{n=2} \int_0^t \int_0^t h_{jk}(t-\tau) h_{jk}(t'-\tau') K_{f_k f_k}(\tau, \tau') d\tau d\tau'.$$

Pr.9.6

Určte rozptyl $D_{x_j}(t)$ výchyliek $x_j(t)$, $j=1,2,\dots,2n$ sústavy opísanej v príklade 7.3 využitím Markovových procesov, ak uvažovaná sústava je lineárna.

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 7.3 je:

$$\dot{x}_j(t) = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) + c_j \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, 2n,$$

kde

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} x_k(t), \quad j = 1, 2, \dots, 2n,$$

Na základe riešenia príkladu 7.3, druhá Kolmogorovova rovnica pre $2n$ -rozmerný Markovov proces má tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial (f a_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial^2 (f b_{jk})}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

pričom koeficienty $a_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} x_k(t)$ sú lineárne funkcie $x_j(t)$ a $b_{jk} = c_j c_k$.

Pri začiatočných podmienkach $t = \tau$ a podmienke pre každé τ pre hustotu pravdepodobnosti f dostaneme:

$$f = \prod_{j=1}^{2n} \delta(x_j - x_{0j}),$$

ak $|x_j| \rightarrow \infty$, potom $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f dx_1 \dots dx_{2n} = 1$.

Od hustoty pravdepodobnosti f náhodných veličín x_1, x_2, \dots, x_{2n} možno prejsť ku charakteristickej funkcii:

$$E(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^{2n} z_k x_k} f dx_1 \dots dx_{2n}.$$

Vynásobením Kolmogorovovej rovnice výrazom $e^{i \sum_{k=1}^{2n} z_k x_k}$ a po integrovaní dostaneme systém lineárnych rovníc v tvare:

$$\dot{m}_{x_j}(t) - \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} m_{x_j}(t) = \alpha_j,$$

$$\dot{K}_{x_j x_l}(t) - \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} K_{x_k x_l}(t) = b_{jl}.$$

Pr.9.7

Určte rozptyl $D_q(t)$ výchyliek $q(t)$ sústavy opísanej v príklade 9.1, ak budenie má charakter bieleho šumu využitím Markovových procesov.

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 9.1, kolísanie uhlovej rýchlosti opisuje vzťah:

$$\dot{\phi}(t) = -k q(t) + \xi(t).$$

Na základe riešenia príkladu 7.3 a 6.9 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-k q f)}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(A f)}{\partial q^2} = 0.$$

Na základe riešenia príkladu 9.6 je:

$$m_q(t) - k m_q(t) = 0,$$

$$D_q(t) - k D_q(t) = A,$$

z ktorých vyplýva:

$$m_q(t) = q_0 e^{-k t},$$

$$D_q(t) = \frac{A}{2k} [1 - e^{-2k t}].$$

kde je $q(0) = q_0$.

Pr.9.8

Určte rozptyl $D_q(t)$ výchyliek $q(t)$ dynamickej sústavy:

$$\ddot{q}(t) + 2 \delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \xi(t),$$

využitím Markovových procesov, ak $\xi(t)$ je centrováný náhodný proces typu biely šum.

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 7.3 a 6.9 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare ($\phi(t) = x_1(t)$, $q(t) = x_2(t)$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-2 \delta x_1 - \omega_0^2 x_2) f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1 f}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (A f)}{\partial x_1^2} = 0.$$

Na základe príkladu 9.6 dostaneme vzťahy:

$$m_x(t) - A m_x(t) = 0,$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(t) - A D_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b},$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 2\delta & \omega_o^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, m_{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \end{bmatrix}, D_{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \end{bmatrix},$$

z ktorých vyplýva:

$$m_q(t) = q_0 e^{-\delta t} [\cos \omega_d t + \frac{\delta}{\omega_d} \sin \omega_d t],$$

$$D_q(t) = \frac{A}{4 h k^2} \left\{ \left[1 - \frac{k^2}{\omega_o^2} e^{-2ht} \right] + \frac{h^2}{\omega_o^2} e^{-2ht} [h \cos^2 \omega_0 t + \omega_0 \sin 2\omega_0 t] \right\} =$$

$$= \frac{A}{4 \omega_d^2 \delta (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d^2 + e^{-2\delta t} (\delta^2 \cos 2\omega_d t - \omega_d \delta \sin 2\omega_d t - \omega_d^2 - \delta^2)],$$

kde $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2$, $q(0) = q_0$, $\mathcal{L}(0) = 0$.

10. Stacionárne vynútené kmitanie sústavy s jedným vstupom

Vynútené kmitanie $q(t)$ lineárnej sústavy s konštantnými koeficientami s jedným vstupom $f(t)$, na základe rovnice (9.1) je:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Ak je lineárna sústava stabilná s konštantnými koeficientami a so stacionárnym vstupom $f(t)$, tak pri dostatočne veľkom t možno výstup zo sústavy $q(t)$ považovať za stacionárny - ustálený.

Fourierova transformácia váhovej (impulznej) funkcie $h(t)$ lineárnej sústavy stabilnej s konštantnými koeficientami je:

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt,$$

a nazýva sa prenos sústavy.

Vzťah medzi Fourierovými transformáciami $Q(i\omega)$, $F(i\omega)$ j -tého výstupu $q(t)$ a k -tého vstupu $f(t)$ sústavy je:

$$Q_j(i\omega) = H_{jk}(i\omega) F_k(i\omega),$$

Prenos sústavy $H_{jk}(i\omega)$ medzi j -tým výstupom a k -tým vstupom je j,k -ty prvok maticy prenosov sústavy $\mathbf{H}(i\omega) = \{H_{jk}(i\omega)\}$, pre ktorú platí:

$$\mathbf{H}(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1}.$$

V prípade rovnakých zjednodušujúcich podmienok ako v kapitole č. 8 matica prenosov je:

$$\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{V} (\mathbf{\Omega}_o^2 - \omega^2 \mathbf{I} + i\omega 2\mathbf{\Delta})^{-1} \mathbf{V}^T.$$

Príklady

Pr.10.1

Ukážte, že platí vzťah:

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega),$$

kde $Y(i\omega)$, $X(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ sústavy s prenosom $H(i\omega)$.

Riešenie.

Odozvu $y(t)$ sústavy na vstup $x(t)$ vyjadruje vzťah (9.1). Potom analogicky ako pri riešení príkladu 6.2 a na základe vlastností (9.2) váhovej funkcie $h(t)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega\tau} h(t-\tau) d\omega d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega(t-u)} h(u) du d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Keďže na základe vzťahu (6.2.a) je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

potom porovnaním vzťahov pre vyjadrenie odozvy $y(t)$ dostaneme určený vzťah.

Pr.10.2

Ukážte, že platí vzťah:

$$m_y = H(0) m_x,$$

kde m_y , m_x sú stredné hodnoty stacionárneho náhodného výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ sústavy a $H(i\omega)_{\omega=0}$ je jej prenos.

Riešenie.

Strednú hodnotu stacionárneho náhodného výstupu sústavy vyjadruje vzťah:

$$m_y = M[y(t)] = M\left[\int_0^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau\right] = \int_0^{\infty} M[x(t-\tau)] h(\tau) d\tau = m_x \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

Na základe riešenia príkladu 10.1 vyplýva, že prenos sústavy je Fourierovou transformáciou impulznej funkcie:

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Potom na základe vlastností impulznej funkcie (9.2) a pre $\omega = 0$ vyplýva určovaný vzťah.

Pr.10.3

Ukážte, že platí:

$$S_{yx}(\omega) = S_x(\omega) \bar{H}(i\omega),$$

kde $S_y(\omega)$, $S_x(\omega)$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho náhodného výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ sústavy a $H(i\omega)$ je jej prenos.

Riešenie.

Korelačnú funkciu $R_{yx}(\tau)$ stacionárneho náhodného výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ sústavy možno analogicky ako pri riešení príkladu 10.1 na základe vzťahu (4.6) vyjadriť vzťahom:

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= M[y(t) x(t+\tau)] = M\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) x(t+\tau) d\tau\right] = \\ &= M\left[\int_{-\infty}^t x(\tau_1) x(t+\tau) h(t-\tau_1) d\tau_1\right] = \int_{-\infty}^t R_x(\tau_1, t+\tau) h(t-\tau_1) d\tau_1 = \\ &= \int_{-\infty}^t R_x(t+\tau-\tau_1) h(t-\tau_1) d\tau_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega(t+\tau-\tau_1)} h(t-\tau_1) d\tau_1 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega(u+\tau)} h(u) du d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(i\omega) S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Keďže na základe vzťahu (6.6.a) je:

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

potom porovnaním vzťahov pre vyjadrenie $R_{yx}(\tau)$ dostaneme určovaný vzťah.

Iný možný spôsob na potvrdenie platnosti určovaného vzťahu možno nájsť využitím vzťahu uvedeného v príklade 10.1:

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega),$$

$$\bar{Y}(i\omega) = \bar{H}(i\omega) \bar{X}(i\omega).$$

Vynásobením poslednej rovnice hodnotou $X(i\omega)$ na základe riešenia príkladu 6.4 dostaneme:

$$S_{yx}(i\omega) = \bar{H}(i\omega) S_x(\omega).$$

Pr.10.4

Ukážte, že platí:

$$S_y(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_x(\omega) = H(i\omega) S_{yx}(\omega),$$

kde $S_y(\omega)$, $S_x(\omega)$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho náhodného výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ sústavy a $H(i\omega)$ je jej prenos.

Riešenie.

Korelačnú funkciu $R_y(\tau)$ stacionárneho náhodného výstupu $y(t)$ sústavy so vstupom $x(t)$ možno analogicky ako pri riešení príkladu 10.1 na základe vzťahu (4.6) vyjadriť vzťahom:

$$R_y(\tau) = M[y(t) y(t+\tau)] = M\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{t+\tau} x(\tau) h(t+\tau-\tau) d\tau \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= M \left[\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} x(\tau_1) x(\tau_2) h(t-\tau_1) h(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] = \\
&= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} R_x(\tau_1, \tau_2) h(t-\tau_1) h(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} R_x(\tau_2 - \tau_1) h(t-\tau_1) h(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} h(t-\tau_1) h(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega(u-v+\tau)} h(u) h(v) du dv d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) /H(i\omega)/^2 e^{i\omega\tau} d\omega.
\end{aligned}$$

Keďže na základe vzťahu (6.4.a) je:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

potom porovnaním vzťahov pre vyjadrenie $R_y(\tau)$ dostaneme určovaný vzťah.

Iný možný spôsob na potvrdenie platnosti určovaného vzťahu možno nájsť využitím vzťahu uvedeného v príklade 10.1:

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega),$$

$$\bar{Y}(i\omega) = \bar{H}(i\omega) \bar{X}(i\omega),$$

Vynásobením poslednej rovnice hodnotou $Y(i\omega)$ na základe riešenia príkladu 6.4 dostaneme:

$$S_y(i\omega) = \bar{H}(i\omega) S_{xy}(\omega) = \bar{H}(i\omega) H(i\omega) S_x(\omega) = /H(i\omega)/^2 S_x(\omega).$$

Dosadením vzťahu z príkladu 10.3 dostaneme druhú rovnosť.

Pr.10.5

Ukážte, že pre koherenčnú funkciu $\gamma_{yx}^2(\omega)$ výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ lineárnej sústavy platí:

$$\gamma_{yx}^2(\omega) = 1.$$

Riešenie.

Na základe vzťahu (6.7) a na základe príkladu 10.4 je:

$$\gamma_{yx}^2(\omega) = \frac{|S_{yx}(i\omega)|^2}{S_x(\omega) S_y(\omega)} = \frac{|H(i\omega)|^2 S_x(\omega)^2}{S_x(\omega) |H(i\omega)|^2 S_x(\omega)} = 1.$$

Pr.10.6

Určte koherenčnú funkciu $\gamma_{yx}^2(\omega)$ celkového výstupu $y(t)$, ktorý je tvorený superpozíciou odozvy sústavy na vstup $x(t)$ a s nim nekorelovaného šumu $z(t)$, pričom $x(t)$ a $z(t)$ sú centrované procesy.

Riešenie.

Celkový výstup $y(t)$ vyjadruje vzťah:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau + z(t).$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah a na základe riešenia príkladov 2.6, 4.9, 6.8, 10.3 a 10.4 pri nekorelovanosti vstupu do sústavy $x(t)$ a šumu $z(t)$ dostaneme vzťah:

$$S_{yx}(i\omega) = S_x(\omega) \bar{H}(i\omega),$$

$$S_y(\omega) = H(i\omega) S_{yx}(i\omega) + S_z(\omega),$$

$$S_z(\omega) = S_y(\omega) - H(i\omega) S_{yx}(i\omega) = S_y(\omega) - \frac{S_{yx}(i\omega)^2}{S_x(\omega)} = S_y(\omega) [1 - \gamma_{yx}^2(\omega)],$$

na základe ktorého vyplýva určovaný vzťah:

$$\gamma_{yx}^2(\omega) = 1 - \frac{S_z(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{H(i\omega) S_{yx}(i\omega)}{S_y(\omega)}.$$

Pr.10.7

Určte:

a) koherenčnú funkciu $\gamma_{vu}^2(\omega)$ a

b) oblasti použitia aproximácií prenosu sústavy $H(i\omega)$

pomocou meraní získaných procesov $v(t) = y(t) + n(t)$ a $u(t) = x(t) + m(t)$, kde proces $y(t)$ je odozva sústavy na vstup $x(t)$ a $n(t)$, $m(t)$ sú nekorelovaného šumy, pričom $x(t)$, $n(t)$ a $m(t)$ sú centrované procesy.

Riešenie.

Aplikovaním Fourierovej transformácie na vzťahy vyjadrujúce procesy $u(t)$ a $v(t)$ pri zohľadnení riešení príkladov 2.6, 6.8 a 10.3 pri nekorelovanosti procesov $m(t)$ a $n(t)$ s procesmi $x(t)$ a $y(t)$ dostaneme vzťahy:

$$S_u(\omega) = S_x(\omega) + S_m(\omega),$$

$$S_v(\omega) = S_y(\omega) + S_n(\omega),$$

$$S_{vu}(\omega) = S_{yx}(\omega).$$

a) Pri zohľadnení riešenia príkladu 10.5 pre $\gamma_{yx}^2(\omega)$ platí:

$$\gamma_{yx}^2(\omega) = \frac{S_{yx}(i\omega)^2}{S_y(\omega) S_x(\omega)} = 1.$$

Pre meraní získanú $\gamma_{yx}^2(\omega)$ platí:

$$\gamma_{vu}^2(\omega) = \frac{/S_{yu}(i\omega)/^2}{S_v(\omega) S_u(\omega)} = \frac{/S_{yx}(i\omega)/^2}{[S_y(\omega) + S_n(\omega)] [S_x(\omega) + S_m(\omega)]} < 1.$$

b) Prenos sústavy $H(i\omega)$ a jeho aproximácie $H_x(i\omega)$, $H_y(i\omega)$ môžeme na základe riešení príkladov 6.6 a 10.3-4 vyjadriť v tvare:

$$H(i\omega) = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(i\omega)},$$

$$H_x(i\omega) = \frac{S_{uv}(i\omega)}{S_u(\omega)} = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_x(\omega) + S_m(\omega)} = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_x(\omega) [1 + \frac{S_m(\omega)}{S_x(\omega)}]},$$

$$H_y(i\omega) = \frac{S_v(\omega)}{S_{vu}(i\omega)} = \frac{S_y(\omega) + S_n(\omega)}{S_{yx}(i\omega)} = \frac{S_y(\omega) [1 + \frac{S_n(\omega)}{S_y(\omega)}]}{S_{yx}(i\omega)},$$

na základe ktorých platí, že aproximáciu prenosu $H_x(i\omega)$ je výhodné používať, ak je zanedbateľný šum na vstupe, aproximáciu prenosu $H_y(i\omega)$ je výhodné používať, ak je zanedbateľný šum na výstupe. V prípade kombinácie šumov na vstupe aj na výstupe aproximáciu prenosu $H_x(i\omega)$ je výhodné používať vo frekvenčnom rozsahu, kedy úroveň šumu je nižšia ako úroveň vstupu (v oblastiach antirezonancie) a aproximáciu prenosu $H_y(i\omega)$ je výhodné používať vo frekvenčnom rozsahu, kedy úroveň šumu je nižšia ako úroveň výstupu (v oblastiach rezonancie).

Pr.10.8

Určte rozptyl D_y ustáleného výstupu $y(t)$ sústavy, ak poznáte stacionárny vstup do sústavy $x(t)$, fyzikálne parametre sústavy a koeficientové matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} , ktoré charakterizujú kmitanie sústavy.

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania sústavy s n stupňami voľnosti a s jedným vstupom $x(t)$ je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ q_{j-1}(t) \\ q_j(t) = y(t) \\ q_{j+1}(t) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ f_{k-1}(t) = 0 \\ f_k(t) = x(t) \\ f_{k+1}(t) = 0 \\ \mathbf{M} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{q}(t)$ je vektor zovšeobecnených posunutí s j -tým prvkom $y(t)$ a $\mathbf{f}(t)$ vektor zovšeobecnených síl s k -tým prvkom $x(t)$. Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah na základe vzťahu (6.1.a) a riešenia príkladu 6.12 dostaneme:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{F}(i\omega),$$

$$\mathbf{Q}(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega),$$

$$Y(i\omega) = H_{jk}(i\omega) X(i\omega),$$

kde $Y(i\omega)$, $X(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$ a vstupu $x(t)$ a $H_{jk}(i\omega)$ je j,k -ty prvok matice $\mathbf{H}(i\omega)$ prenosov sústavy. Na základe riešenia príkladu 10.2 a 10.4 dostaneme:

$$m_y = H_{jk}(0) m_x,$$

$$S_y(\omega) = |H_{jk}(\omega)|^2 S_x(\omega).$$

kde $S_y(\omega)$ a $S_x(\omega)$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Na základe riešenia príkladu 6.1 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_y výstupu $y(t)$:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega - m_y^2,$$

kde platí:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(i\omega)}{|A_n(i\omega)|^2} d\omega,$$

pričom je:

$$H_{jk}(i\omega) = \frac{A + iB}{C + iD} = \frac{A + iB}{C + iD} \frac{C - iD}{C - iD} = \frac{[(AC + BD) + i(BC - AD)]}{C^2 + D^2},$$

$$|H_{jk}(i\omega)|^2 = \frac{|[(AC + BD) + i(BC - AD)]|^2}{|(C + iD)^2|^2} = \frac{K_h}{|(C + iD)^2|^2},$$

$$S_x(\omega) = \frac{K_x}{|E + iF|^2},$$

$$A_n(i\omega) = (C + iD)^2 (E + iF) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$G_n(i\omega) = K_h K_x = b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \dots + b_n;$$

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1} U_n}{2 a_0 V_n},$$

$$V_n = \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \text{L} & v_{1n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{L} & \text{M} \\ v_{n1} & v_{n2} & \text{L} & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad U_n = \det \begin{bmatrix} b_0 & v_{12} & \text{L} & v_{1n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{L} & \text{M} \\ b_n & v_{n2} & \text{L} & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad v_{jk} = a_{2j-k}.$$

Ak $2j-k=n$ a $m < 0$ alebo $m > n$, potom $a_m=0$.

Pr.10.9

Nájdite strednú hodnotu m_q a rozptyl D_q funkcie $q(t)$, ktorá opisuje ustálený pohyb telesa z príkladu 9.2, ak funkcia opisujúca budenie $f(t)$ má charakter bieleho šumu so strednou hodnotou $m_f(t) = a$ a kovariančnou funkciou $K_f(t, t') = A \delta(t' - t)$.

Riešenie

Pohybová rovnica telesa sústavy s jedným vstupom $f(t)$ a jedným výstupom $q(t)$ je:

$$I \frac{dq(t)}{dt} + k q(t) = f(t).$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah a na základe vzťahu (6.1.a) dostaneme:

$$(k + i \omega I) Q(i\omega) = F(i\omega),$$

kde $Q(i\omega)$, $F(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ možno vyjadriť vzťahom:

$$H(i\omega) = \frac{1}{(k) + i(\omega I)}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.8 je:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(k)^2 + (\omega I)^2}{[(k)^2 + (\omega I)^2]^2} = \frac{1}{(k) + i(\omega I)^2}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.2 je stredná hodnota m_q ustáleného pohybu telesa daná rovnicou:

$$m_q = H(0) m_f = \frac{1}{k} a.$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 dostaneme:

$$S_q(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{1}{1/(k) + i(\omega I)^2} A,$$

kde $S_q(\omega)$ a $S_f(\omega) = A$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Na základe riešenia príkladu 6.1 a 10.8 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_q ustáleného pohybu telesa:

$$D_q = I_n,$$

kde

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(i\omega)}{|A_n(i\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1/(k) + i(\omega I)^2} A d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1/(k) + i(\omega I)^2} d\omega, \end{aligned}$$

$$A_1(i\omega) = a_0 (i\omega)^1 + a_1 = I (i\omega)^1 + k,$$

$$G_1(i\omega) = b_0 = A;$$

$$V_1 = \det([v_{11}]), U_1 = \det([b_0]), v_{11} = a_{2-1} = a_1,$$

$$I_1 = \frac{(-1)^2 b_0}{2 a_0 a_1} = \frac{A}{2 I k}.$$

Rovnaký výsledok dostávame aj využitím riešenia príkladu 9.2 pre ustálené riešenie:

$$m_{qu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{k} (1 - e^{-\frac{k}{I} t}) = \frac{a}{k},$$

$$D_{qu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{2 I k} [1 - e^{-2 \frac{k}{I} t}] = \frac{A}{2 I k}.$$

Pr.10.10

Nájdite strednú hodnotu m_q a rozptyl D_q funkcie $q(t)$, ktorá opisuje ustálený pohyb telesa z príkladu 9.2, ak funkcia opisujúca budenie $f(t)$ je stacionárny centrovaný normálny náhodný proces ($m_f = 0$) s korelačnou funkciou $R_f(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}$.

Riešenie

Pohybová rovnica bremena sústavy s jedným vstupom $f(t)$ a jedným výstupom $q(t)$ je:

$$\ddot{q}(t) + k q(t) = f(t).$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(k + i \omega) Q(i\omega) = F(i\omega),$$

kde $Q(i\omega)$, $F(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ je:

$$H(i\omega) = \frac{1}{k + i \omega}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.2 dostaneme strednú hodnotu m_q ustáleného pohybu telesa:

$$m_q = H(0) m_z = 0,$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 dostaneme vzťahy:

$$S_q(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{1}{(k + i(\omega I))^2} A \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

kde $S_q(\omega)$ a $S_f(\omega) = A \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Na základe riešenia príkladov 6.1 a 10.8 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_q ustáleného pohybu telesa:

$$D_q = I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha A}{/k+i\omega/2 / \alpha+i\omega/2} d\omega = \frac{A}{k(k+\alpha)},$$

kde

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(i\omega)}{/A_n(i\omega)/^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha A}{/k+i\omega/2 / \alpha+i\omega/2} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha A}{/(k\alpha - \omega^2) + i\omega(\alpha + k)/^2} d\omega, \end{aligned}$$

$$A_2(i\omega) = a_0 (i\omega)^2 + a_1 (i\omega)^1 + a_2 = (i\omega)^2 + (\alpha + k) (i\omega) + k\alpha,$$

$$G_2(i\omega) = b_0 (i\omega)^2 + b_1 = 0 (i\omega)^2 + 2\alpha A;$$

$$v_{11} = a_{2-1} = a_1, v_{12} = a_{2-2} = a_0, v_{21} = a_{2-2-1} = a_3 = 0, v_{22} = a_{2-2-2} = a_2,$$

$$V_2 = (\alpha + k)k\alpha, U_2 = -2\alpha A,$$

$$I_2 = \frac{(-1)^3 (-2\alpha A)}{2(\alpha + k)k\alpha} = \frac{A}{k(k+\alpha)}.$$

Rovnaký výsledok dostávame aj využitím riešenia príkladu 9.2 pre ustálené riešenie:

$$m_{qu} = \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$D_{qu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{k(k^2 - \alpha^2)} \{-\alpha [1 - e^{-2kt}] + k [1 + e^{-2kt} - 2e^{-(k+\alpha)t}]\} =$$

$$= \frac{A(k-\alpha)}{k(k^2-\alpha^2)} = \frac{A}{k(k+\alpha)}.$$

Pr.10.11

Nájdite strednú hodnotu m_q a rozptyl D_q ustálených výchyliek kmitania $q(t)$, bremena z príkladu 9.3, ak funkcia opisujúca budenie $f(t)$ je typu bieleho šumu so strednou hodnotou $m_f(t) = a$ a kovariančnou funkciou $K_f(t, t') = A \delta(t'-t)$.

Riešenie

Pohybová rovnica bremena, sústavy s jedným vstupom $f(t)$ a jedným výstupom $q(t)$, je:

$$m \ddot{q}(t) + b \dot{q}(t) + k q(t) = f(t).$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah pri zohľadnení vzťahu (6.1.a) dostaneme:

$$(k + i \omega b - \omega^2 m) Q(i\omega) = F(i\omega),$$

kde $Q(i\omega)$, $F(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ je:

$$H(i\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega b)}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.8 je:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.2 dostaneme strednú hodnotu m_q ustáleného pohybu bremena:

$$m_q = H(0) m_f = \frac{1}{k} a,$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 dostaneme:

$$S_q(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{l}{/(k - \omega^2 m) + i(\omega b)/^2} A,$$

kde $S_q(\omega)$ a $S_f(\omega) = A$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$. Na základe riešenia príkladu 6.1 a 10.8 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_q ustáleného pohybu bremena:

$$D_q = I_n,$$

kde

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(i\omega)}{|A_n(i\omega)|^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l}{/(k - \omega^2 m) + i(\omega b)/^2} A d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{/(k - \omega^2 m) + i(\omega b)/^2} d\omega, \end{aligned}$$

$$A_2(i\omega) = a_0 (i\omega)^2 + a_1 (i\omega)^1 + a_2 = m (i\omega)^2 + b (i\omega)^2 + k,$$

$$G_2(i\omega) = b_0 (i\omega)^2 + b_1 = 0 (i\omega)^2 + A;$$

$$v_{11} = a_{2-1} = a_1, v_{12} = a_{2-2} = a_0, v_{21} = a_{2-1} = a_3 = 0, v_{22} = a_{2-2} = a_2,$$

$$V_2 = b k, U_n = -A m,$$

$$I_2 = \frac{(-1)^3 (-A m)}{2 m b k} = \frac{A}{2 b k}.$$

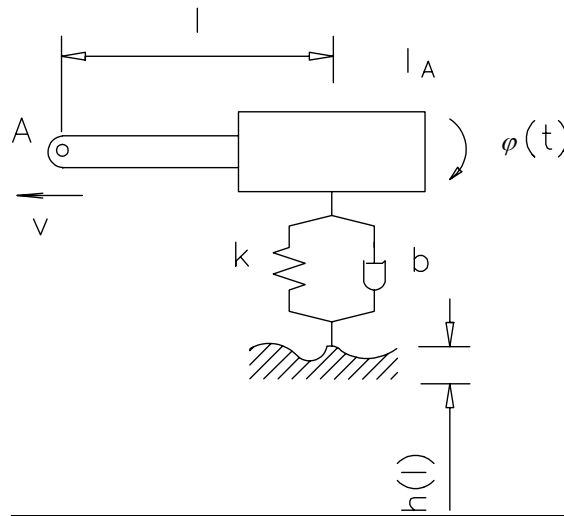
Rovnaký výsledok dostávame aj využitím riešenia príkladu 9.4 pre ustálené riešenie:

$$m_{qu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{m \omega_d (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d (1 - e^{-\delta t} \cos \omega_d t) - e^{-\delta t} \sin \omega_d t] = \frac{a}{m (\omega_d^2 + \delta^2)} = \frac{a}{k},$$

$$D_{qu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{4 m^2 \omega_d^2 \delta (\omega_d^2 + \delta^2)} [\omega_d^2 + e^{-2 \delta t} (\delta^2 \cos 2 \omega_d t - \omega_d \delta \sin 2 \omega_d t - \omega_d^2 - \delta^2)] = \frac{A}{4 m^2 \delta (\omega_d^2 + \delta^2)} = \frac{A}{2 b k}.$$

Pr.10.12

Bremeno na obrázku. č. 10 sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v po podložke s nerovnosťami popísanými korelačnou funkciou $R_h(\lambda) = D_h e^{-\alpha |\lambda|}$ ($h(l)$ je funkcia nerovností povrchu, $\lambda = l_2 - l_1$ je dráhové oneskorenie, $\alpha > 0$ je konštanta). Určte rozptyl D_φ uhlových výchyliek $\varphi(t)$ bremena okolo závesu A , keď pružné uloženie bremena má tuhosť k a súčiniteľ viskózneho tlmenia b , vzdialenosť l medzi osou závesu a pružným uložením a moment zotrvačnosti bremena k hlavnej osi zotrvačnosti rovnobežnej s osou závesu je I_A .



Obr. č. 10

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania bremena sústavy s jedným vstupom $s(t)$ a jedným výstupom $\varphi(t)$ okolo rovnovážnej polohy je:

$$I_A \ddot{\varphi}(t) + b l [l \dot{\varphi}(t) - \dot{s}(t)] + k l [l \varphi(t) - s(t)] = 0$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah pri zohľadnení vzťahu (6.1.a) a riešenia príkladu 6.14 dostaneme:

$$(k l^2 - \omega^2 I_A + i \omega b l) \Theta(i\omega) = (k l + i \omega b l) S(i\omega),$$

kde $\Theta(i\omega)$, $S(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $\varphi(t)$ a vstupu $s(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ je:

$$H(i\omega) = \frac{(k l + i \omega b l)}{(k l^2 - \omega^2 I_A) + i \omega b l} = \frac{A + i B}{C + i D}.$$

Na základe príkladu 10.8 je:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{[(k l)(k l^2 - \omega^2 I_A) + (\omega b l)(\omega b l^2)]^2}{[(k l^2 - \omega^2 I_A)^2 + (\omega b l^2)^2]^2} + \frac{[(\omega b l)(k l^2 - \omega^2 I_A) + (k l)(\omega b l^2)]^2}{[(k l^2 - \omega^2 I_A)^2 + (\omega b l^2)^2]^2}.$$

Na základe riešenia príkladov 10.2 a 10.4 je:

$$m_\varphi = H(0) m_s,$$

$$S_\varphi(\omega) = |H(\omega)|^2 S_s(\omega).$$

Pretože pre korelačnú funkciu nerovnosti povrchu $h(l)$ a vstupu sústavy $s(t)$ platí:

$$R_h(\lambda) = R_h(v\tau) = R_s(\tau),$$

potom, keď spektrálne výkonové hustoty $S_h(\omega_h)$ a $S_s(\omega)$ sú Fourierovými transformáciami korelačných funkcií $R_h(\lambda)$ a $R_s(\tau)$, je:

$$S_s(\omega) = S_h(\omega_h v).$$

Súčasne:

$$D_h = D_s,$$

a teda aj

$$S_s(\omega) d\omega = S_h(\omega_h) d\omega_h = S_h\left(\frac{\omega}{v}\right) d\omega_h = S_h\left(\frac{\omega}{v}\right) \frac{d\omega}{v}.$$

Potom na základe riešenia príkladu 6.11 dostaneme:

$$S_s(\omega) = \frac{S_h\left(\frac{\omega}{v}\right)}{v} = \frac{2\alpha D_h}{v [\alpha^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2]} = \frac{2v\alpha D_h}{[(v\alpha)^2 + \omega^2]} = \frac{2v\alpha D_h}{v\alpha + i\omega/2} = \frac{K_s}{E + iF/2}.$$

Na základe riešenia príkladu 6.1 dostaneme hľadaný vzťah:

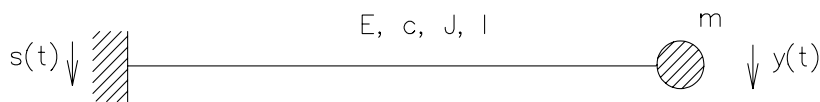
$$D_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega) d\omega - m_\varphi^2,$$

kde $m_\varphi^2 = 0$, lebo $m_s^2 = m_h^2 = R_h(\infty) = 0$. Na základe riešenia príkladu 10.8 rozptyl D_φ vyjadríme v tvare:

$$D_\varphi = I_n = \frac{2v\alpha D_h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(k l^2 - \omega^2 I_A) + (\omega b l^2)]^2 + [(\omega b l) (k l^2 - \omega^2 I_A) + (k l) (\omega b l^2)]^2}{/[(k l^2 - \omega^2 I_A) + i (\omega b l^2)]^2 / v \alpha + i \omega / 2} d\omega.$$

Pr.10.13

Bremeno zanedbateľných rozmerov o hmotnosti m je pripevnené k základu pomocou vodorovného votknutého nosníka zanedbateľnej hmotnosti s materiálovými a geometrickými charakteristikami E , c , J , l (modul pružnosti, Voightova konštanta tlmenia, prierezový moment zotrvačnosti, dĺžka nosníka) podľa obrázka č. 11, pričom vykonáva vo vertikálnom smere pohyb $s(t)$ opísaný spektrálnou výkonovou hustotou $S_s(\omega) = A$. Určte rozptyl D_y posunutia a $D_{\ddot{y}}$ zrýchlenia ťažiska bremena okolo rovnovážnej polohy.



Obr. č. 11

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania ťažiska bremena okolo rovnovážnej polohy sústavy s jedným vstupom $s(t)$ a jedným výstupom $y(t)$, je:

$$m \ddot{y}(t) + b [\dot{y}(t) - \dot{s}(t)] + k [y(t) - s(t)] = 0,$$

kde $k = 3 E J / l^3$, $b = c k$. Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah pri zohľadnení vzťahu (6.1.a) a riešenia príkladu 6.14 dostaneme:

$$(k - \omega^2 m + i \omega b) Y(i\omega) = (k + i \omega b) S(i\omega),$$

kde $Y(i\omega)$, $S(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$ a vstupu $s(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ je:

$$H(i\omega) = \frac{(k + i \omega b)}{(k - \omega^2 m) + i \omega b}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.8 je:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{[k(k - \omega^2 m) + (\omega b)(\omega b)]^2}{[(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2]^2} + \frac{[(\omega b)(k - \omega^2 m) + k(\omega b)]^2}{[(k - \omega^2 m)^2 + (\omega b)^2]^2}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.2 a 10.12 je stredná hodnota m_y ustáleného pohybu bremena:

$$m_y = H(0) m_s = 0,$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 je:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_s(\omega) = A \frac{[k(k - \omega^2 m) + \omega b(\omega b)]^2 + [\omega b(k - \omega^2 m) + k(\omega b)]^2}{/[(k - \omega^2 m) + i(\omega b)]^2 /^2},$$

kde $S_y(\omega)$ a $S_s(\omega) = A$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $y(t)$ a vstupu $s(t)$. Na základe riešenia príkladu 6.1, 10.8 a 10.12 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_y ustáleného pohybu bremena:

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega - m_y^2 = \\ &= I_n = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k(k - \omega^2 m) + \omega b(\omega b)]^2 + [\omega b(k - \omega^2 m) + k(\omega b)]^2}{/[(k - \omega^2 m) + i(\omega b)]^2 /^2} d\omega. \end{aligned}$$

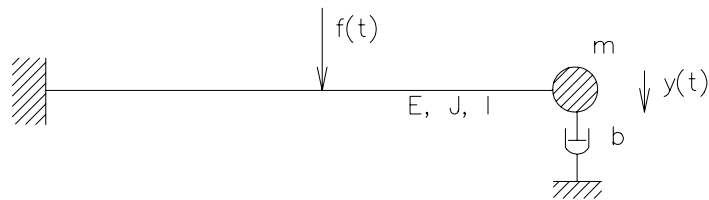
Rozptyl zrýchlenia $D_{\ddot{y}}$ získame na základe riešenia príkladu príkladu 6.13 a 10.12:

$$D_{\ddot{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{y}}(\omega) d\omega - m_{\ddot{y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_y(\omega) d\omega.$$

Pr.10.14

Bremeno zanedbateľných rozmerov o hmotnosti m je pripevnené k základu pomocou vodorovného votknutého nosníka zanedbateľnej hmotnosti s materiálými

a geometrickými charakteristikami E , J , l (modul pružnosti, prierezový moment zotrvačnosti, dĺžka nosníka). Bremeno je súčasne vo vertikálnom smere pripojené k základu pomocou viskózneho tlmiča so súčiniteľom viskózneho tlmenia b . Vo vzdialenosti r podľa obrázka č. 12 pôsobí na nosník sila, ktorej veľkosť sa časom náhodne mení, pričom časový priebeh budiacej sily $f(t)$ má charakter bieleho šumu so spektrálnou výkonovou hustotou $S_f(\omega) = A$. Určte rozptyl D_y posunutia ťažiska bremena $y(t)$ okolo rovnovážnej polohy.



Obr. č. 12

Riešenie.

Skúmaná konštrukcia má charakter sústavy s jedným vstupom a jedným výstupom. Pohybová rovnica kmitania ťažiska bremena okolo rovnovážnej polohy je:

$$y(t) = \delta_{11} [-m \ddot{y}(t) - b \dot{y}(t)] + \delta_{12} f(t),$$

kde ξ a η sú Maxwellove vplyvové koeficienty. Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah pri zohľadnení vzťahu (6.1.a) a príkladu 6.14 dostaneme:

$$(1 - \omega^2 \delta_{11} m + i \omega b) Y(i\omega) = \delta_{12} F(i\omega),$$

kde $Y(i\omega)$, $F(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$ a vstupu $f(t)$. Potom prenos sústavy $H(i\omega)$ je:

$$H(i\omega) = \frac{\delta_{12}}{(1 - \omega^2 \delta_{11} m) + i (\omega b)}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.8 a 10.11 je:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\delta_{12}^2}{(1 - \omega^2 \delta_{11} m) + i (\omega b)^2}.$$

Na základe riešenia príkladu 10.2 a 10.12 je stredná hodnota m_y ustáleného pohybu bremena:

$$m_y = H(0) m_f = 0,$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 je:

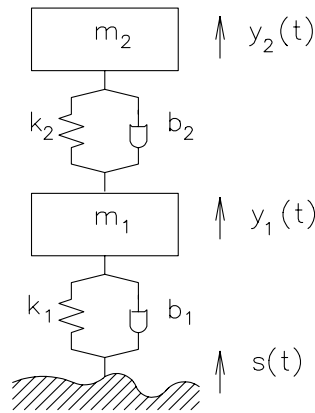
$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega) = \frac{\delta_{12}^2}{(1 - \omega^2 \delta_{11} m) + i (\omega b)^2} A,$$

kde $S_y(\omega)$ a $S_f(\omega) = A$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionárneho výstupu $y(t)$ a vstupu $f(t)$. Na základe riešenia príkladov 6.1, 10.8 a 10.11 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_y ustáleného pohybu bremena:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega - m_y^2 = \frac{\delta_{12}^2 A}{2b}.$$

Pr.10.15

Určte rozptyl D_{y_2} vychyľiek $y_2(t)$ sústavy s parametrami $m_j, b_j, k_j, (j=1,2)$ podľa obrázka č. 13, ak je sústava budená kinematickým buđením $s(t)$ s nulovou strednou hodnotou ($m_s = 0$) a so spektrálnou výkonovou hustotou $S_s(\omega)$.



Obr. č. 13

Riešenie.

Pohybové rovnice kmitania bremien okolo rovnovážnej polohy (sústavy s jedným vstupom $s(t)$ a jedným hľadaným výstupom $y_2(t)$) sú:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{s}(t) + k_1 s(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{F}(i\omega),$$

$$\mathbf{Q}(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega),$$

$$Y_2(i\omega) = H_{21}(i\omega) F_1(i\omega),$$

kde $Y_2(i\omega)$, $F_1(i\omega) = (k_1 + i\omega b_1) S(i\omega)$, $S(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y_2(t)$, budenia $f_1(t)$, vstupu $s(t)$ a $H_{21}(i\omega)$ je 2,1-ty prvok matice $\mathbf{H}(i\omega)$. Na základe riešenia príkladu 10.2 a 10.12 dostaneme strednú hodnotu m_{y_2} ustáleného pohybu bremena:

$$m_{y_2} = H_{21}(0) (k + i0 b) m_s = 0.$$

Na základe riešenia príkladov 6.9 a 10.4 je:

$$S_{y_2}(\omega) = /H_{21}(\omega) (k + i\omega b)^2 S_s(\omega),$$

kde $S_{y_2}(\omega)$ a $S_s(\omega)$ sú spektrálne výkonové hustoty stacionarného výstupu $y_2(t)$ a vstupu $s(t)$. Na základe riešenia príkladu 6.1, 10.8 a 10.11 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl D_{y_2} ustáleného pohybu bremena:

$$D_{y_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_2}(\omega) d\omega.$$

Pr.10.16

Určte rozptyl D_q ustálených výchyliek $q(t)$ sústavy opísanej v príklade 10.9 využitím Markovových procesov.

Riešenie.

Pohybová rovnica opisujúca pohyb telesa je:

$$\Phi(t) = -k q(t) + z(t).$$

Na základe riešenia príkladu 7.3 a 6.9 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-k q f)}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(A f)}{\partial q^2} = 0.$$

Riešime stacionárny prípad, pre ktorý platí:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

z čoho vyplýva:

$$\frac{A}{2} \frac{\partial f}{\partial q} + k q f = c_1.$$

Z vlastnosti hustoty rozdelenia f ($f(q) = 0$ v prípade $|q| \rightarrow \infty$) vyplýva $c_1 = 0$. Potom dostaneme rovnosti na základe vzťahu (1.17) a riešenia príkladu 2.8:

$$f = c_2 e^{-\frac{2}{A} \int_0^q k q dq} = c_2 e^{-\frac{1}{A} k q^2},$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} c_2 e^{-\frac{1}{A} k q^2} dq = c_2 \sqrt{\frac{\pi A}{k}},$$

$$D_q = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 c_2 e^{-\frac{1}{A} k q^2} dq = \sqrt{\frac{k}{\pi A}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A^3}{k^3}} = \frac{A}{2k}.$$

Pr.10.17

Určte rozptyl D_q ustálených výchyliek $q(t)$ sústavy opísanej v príklade 10.10 využitím Markovových procesov.

Riešenie.

Pohybová rovnica opisujúca pohyb telesa je:

$$\Phi(t) = -k q(t) + z(t).$$

Korelačnú funkciu $R_z(\tau) = A e^{-\omega|\tau|}$ možno vyjadriť v tvare:

$$\mathfrak{B}(t) = -\alpha z(t) + \sqrt{2\alpha A} \xi(t),$$

kde $\xi(t)$ je stacionárny centrováný náhodný proces s charakterom bieleho šumu ($m_\xi = 0$, $R_\xi(\tau) = \delta(\tau)$). Na základe riešenia príkladu 7.3 a pre stacionárny príklad dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial[(z^2 - kq)f]}{\partial q} - \frac{\partial(zf)}{\partial z} - \alpha A \frac{\partial^2(f)}{\partial q^2} = 0.$$

Pre n -tý moment funkcie $q(t)$ je:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q^n f(q, z) dq dz = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) dz.$$

Vynásobením Kolmogorovovej rovnice výrazom q^n a jej integráciou, pričom platí:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} q^n \frac{\partial}{\partial q} [(z^2 - k^2 q) f(q, z)] dq = \\ & = [q^n (z^2 - k^2 q) f(q, z)]_{-\infty}^{\infty} - n \int_{-\infty}^{\infty} q^{n-1} (z^2 - k^2 q) f(q, z) dq = k^2 n \varphi_n(z) - n z^2 \varphi_{n-1}(z), \end{aligned}$$

dostaneme pre $\varphi_{n-1}(z)$ rekurentný vzťah:

$$\alpha A \frac{d^2 \varphi_n}{dz^2} + \alpha \frac{d^2(z \varphi_n)}{dz^2} - k^2 n \varphi_n = -n z^2 \varphi_{n-1}(z).$$

Vynásobením získanej rovnice výrazmi 1 , z^2 a integráciou per partes (členy, ktoré stoja mimo integrálov sú rovné nule) dostaneme rovnice v tvare:

$$m_n = \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \varphi_{n-1}(z) dz,$$

$$m_{n+1} = \frac{1}{k^2 (n k^2 + 2 \alpha)} n \left[\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \varphi_{n-1}(z) dz + 2 A \alpha m_n \right].$$

Pre prípad, že $n = 1$ a hustota pravdepodobnosti:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q, z) dq = \varphi_0(z),$$

má normálne rozdelenie, dostaneme:

$$m_2 = \frac{A}{k(k+\alpha)}.$$

Pr.10.18

Nájdite ustálené rozptyly D_y , $D_{\mathfrak{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\mathfrak{y}(t)$ sústavy opísanej v príklade 10.11 využitím Markovových procesov.

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania skúmanej sústavy je:

$$\mathfrak{y}(t) + 2 \delta \mathfrak{y}(t) + \omega_o^2 y(t) = x(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 7.3 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare ($\mathfrak{y}(t) = x_1(t)$, $y(t) = x_2(t)$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-2\delta x_1 - \omega_o^2 x_2) f}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1 f}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (A f)}{\partial x_1^2} = 0,$$

z ktorej pre stacionárny prípad vyplynie:

$$-2 \delta f - 2 \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (\omega_o^2 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [(\omega_0^2 x_2) f + \frac{A}{4\delta} \frac{\partial f}{\partial x_2}] + (-\frac{\partial}{\partial x_2} + 2\delta \frac{\partial}{\partial x_1}) (x_1 f + \frac{A}{4\delta} \frac{\partial f}{\partial x_1}) = 0,$$

Pre nezávisle x_1 a x_2 platí:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{f_1 [(\omega_0^2 x_2) f_2 + \frac{A}{4\delta} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}]\} + (-\frac{\partial}{\partial x_2} + 2\delta \frac{\partial}{\partial x_1}) [f_2 (x_1 f_1 + \frac{A}{4\delta} \frac{\partial f_1}{\partial x_1})] = 0.$$

Táto rovnosť je splnená, ak platia vzťahy:

$$\frac{df_1}{dx_1} + \frac{4\delta}{A} x_1 f_1 = 0,$$

$$\frac{df_2}{dx_2} + \frac{(\omega_0^2 x_2) 4\delta}{A} f_2 = 0,$$

z ktorých vyplýva:

$$f_1 = c_1 e^{-\frac{4\delta}{2A} x_1^2},$$

$$f_2 = c_2 e^{-\frac{4\delta}{2A} \omega_0^2 x_2^2},$$

Na základe vzťahu (1.17) a riešení príkladov (2.8) a (1.12) nájdeme konštanty c_1, c_2 v tvare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_1 e^{-\frac{4\delta}{2A} x_1^2} dx_1 = 1, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2\delta}{\pi A}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_2 e^{-a (\omega_0^2) x_2^2} dx_2 = 1, \quad c_2 = \sqrt{\frac{a \omega_0^2}{\pi}},$$

kde $a = \frac{2\delta}{A}$. Na základe vzťahu (6.1) dostaneme rozptyly $D_y, D_{\dot{y}}$ v tvare:

$$D_y = \frac{A}{4\delta\omega_0^2}, \quad D_{\dot{y}} = \frac{A}{2\delta}.$$

11. Stacionárne vynútené kmitanie sústavy s viacerými vstupmi

Vynútené kmitanie $q(t)$ lineárnej sústavy s konštantnými koeficientami so vstupmi $f(t)$ vyjadruje vzťah (9.1). Ak je lineárna sústava s konštantnými koeficientami a so stacionárnymi vstupmi $f(t)$ stabilná, tak pri dostatočne veľkom t možno výstupy zo sústavy $q(t)$ považovať za stacionárne - ustálené.

Vzťah medzi Fourierovými transformáciami $Q(i\omega)$, $F(i\omega)$ výstupu $q(t)$ a vstupu $f(t)$ sústavy je:

$$Q(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}(i\omega),$$

kde matica $\mathbf{H}(i\omega) = \{H_{jk}(i\omega)\}$ je matica prenosov sústavy.

Príklady

Pr.11.1

Určte koherenčnú funkciu $\gamma_{y\mathbf{x}^2}(\omega)$ celkového výstupu $y(t)$, ktorý je tvorený superpozíciou odozvy sústavy na vstupy $x_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$) a s nimi nekorelovaného šumu $z(t)$, pričom $x_j(t)$ a $z(t)$ sú centrované procesy.

Riešenie.

Celkový výstup pri zohľadnení vzťahu (9.1) a princípu superpozície vyjadruje vzťah:

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t x_j(\tau) h_j(t-\tau) d\tau + z(t).$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah a na základe riešení príkladov 2.6, 4.9, 6.4, 10.1, 6.8, 10.3 a 10.4 pri nekorelovanosti vstupov do sústavy $x_j(t)$ a šumu $z(t)$ dostaneme vzťahy:

$$Y(i\omega) = \sum_{j=1}^n H_j(i\omega) X_j(i\omega) + Z(i\omega),$$

$$S_{y x_k}(i\omega) = \sum_{j=1}^n S_{x_k x_j}(i\omega) \bar{H}_j(i\omega), \quad k=1,2,\dots,n,$$

$$S_y(i\omega) = \sum_{j=1}^n H_j(i\omega) S_{y x_j}(i\omega) + S_z(\omega),$$

$$S_z(\omega) = S_y(\omega) - \sum_{j=1}^n H_j(i\omega) S_{y x_j}(i\omega).$$

Využitím analógie z riešenia príkladu 10.6 pre koherenčnú funkciu $\gamma_{y\mathbf{x}^2}(\omega)$ vyplynie vzťah:

$$\gamma_{y\mathbf{x}^2}(\omega) = 1 - \frac{S_z(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{\sum_{j=1}^n H_j(i\omega) S_{y x_j}(i\omega)}{S_y(\omega)}.$$

Pr.11.2

Určte koherenčnú funkciu $\gamma_{y_m \mathbf{x}^2}(\omega)$ celkového výstupu $y_m(t)$, ktorý je tvorený superpozíciou odozvy sústavy na vstupy $x_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$) a s nimi nekorelovaného šumu $z(t)$, pričom $x_j(t)$ a $z(t)$ sú centrované procesy v tvare, kde budú vylúčené prenosy $H_{m_j}(i\omega)$ ($j=1,2,\dots,n$) a potvrďte platnosť vzťahu (6.7).

Riešenie

Prenosy $H_{m_j}(i\omega)$ (m -tý riadok matice prenosov $\mathbf{H}(i\omega)$) medzi výstupom $y_m(t)$ a vstupmi $x_j(t)$ ($j=1,2,\dots,n$) možno určiť riešením systému rovníc:

$$S_{y_m x_k}(i\omega) = S_y(\omega) S_{x_j x_k}(\omega) \bar{H}_{m_j}(i\omega), \quad k=1,2,\dots,n,$$

$$S_{y_m \mathbf{x}}(i\omega) = S_{\mathbf{x}}(\omega) \bar{\mathbf{H}}_m(i\omega),$$

kde

$$S_{y_m \mathbf{x}}(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{y_m x_1}(i\omega) \\ S_{y_m x_2}(i\omega) \\ \mathbf{M} \\ S_{y_m x_n}(i\omega) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_m(i\omega) = \begin{bmatrix} \bar{H}_{m_1}(i\omega) \\ \bar{H}_{m_2}(i\omega) \\ \mathbf{M} \\ \bar{H}_{m_n}(i\omega) \end{bmatrix},$$

$$S_{\mathbf{x}}(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{x_1}(\omega) & S_{x_2 x_1}(i\omega) & \mathbf{K} & S_{x_n x_1}(i\omega) \\ S_{x_1 x_2}(i\omega) & S_{x_2}(\omega) & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ S_{x_1 x_n}(i\omega) & \mathbf{K} & \mathbf{K} & S_{x_n}(\omega) \end{bmatrix},$$

v tvare:

$$H_{m_k}(i\omega) = \frac{\det[S_{k\mathbf{x}k}(i\omega)]}{\det[S_{\mathbf{x}}(i\omega)]}, \quad k=1,2,\dots,n,$$

kde

$$S_{k\mathbf{x}}(i\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & S_{x_{k-1} x_1}(i\omega) & S_{y_m x_1}(i\omega) & S_{x_{k+1} x_1}(i\omega) & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & S_{x_{k-1} x_2}(i\omega) & S_{y_m x_2}(i\omega) & S_{x_{k+1} x_2}(i\omega) & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{L} & S_{x_{k-1} x_n}(i\omega) & S_{y_m x_n}(i\omega) & S_{x_{k+1} x_n}(i\omega) & \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad k=2,3,\dots,n.$$

Špeciálny tvar matice $S_{k\mathbf{x}}(i\omega)$ umožní prepísať nasledujúci výraz do tvaru:

$$\sum_{j=1}^n H_{m_j}(i\omega) S_{y_m x_j}(i\omega) = \frac{1}{\det[S_{\mathbf{x}}(i\omega)]} \{S_{y_m}(\omega) \det[S_{\mathbf{x}}(i\omega)] - \det[S_{y_m \mathbf{xx}}(i\omega)]\},$$

kde

$$S_{y_m \mathbf{xx}}(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{y_m}(\omega) & S_{y_m x_1}(i\omega) & S_{y_m x_2}(i\omega) & \text{L} & S_{y_m x_n}(i\omega) \\ S_{x_1 y_m}(i\omega) & S_{x_1}(\omega) & S_{x_2 x_1}(i\omega) & \text{L} & S_{x_n x_1}(i\omega) \\ S_{x_2 y_m}(i\omega) & S_{x_1 x_2}(i\omega) & S_{x_2}(\omega) & \text{L} & \text{L} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ S_{x_n y_m}(i\omega) & S_{x_1 x_n}(i\omega) & \text{L} & \text{L} & S_{x_n}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Na základe riešenia príkladu 11.1 koherenčnú funkciu $\gamma_{y_m \mathbf{x}^2}(\omega)$ možno vyjadriť

v tvare:

$$\gamma_{y_m \mathbf{x}^2}(\omega) = 1 - \frac{\det[S_{y_m \mathbf{xx}}(i\omega)]}{S_{y_m}(\omega) \det[S_{\mathbf{x}}(i\omega)]}.$$

Platnosť vzťahu (6.7) možno potvrdiť využitím uvedených vzťahov. Pre prípad vzťahu (6.7) platí:

$$S_{y_m \mathbf{xx}}(i\omega) = S_{y \mathbf{xx}}(i\omega) = \begin{bmatrix} S_y(\omega) & S_{yx}(i\omega) \\ S_{xy}(i\omega) & S_x(\omega) \end{bmatrix},$$

$$S_{\mathbf{x}}(i\omega) = S_x(i\omega),$$

$$\gamma_{y_m \mathbf{x}^2}(\omega) = \gamma_{y \mathbf{x}^2}(\omega) = 1 - \frac{S_y(\omega)S_x(\omega) - /S_{xy}(i\omega)/^2}{S_y(\omega)S_x(\omega)} = \frac{/S_{xy}(i\omega)/^2}{S_y(\omega)S_x(\omega)}.$$

Pr.11.3

Určte maticu spektrálnych výkonových hustôt $S_{\mathbf{y}}(i\omega)$ n výstupov $y_k(t)$ (analogickú maticu $S_{\mathbf{x}}(i\omega)$) lineárnej dynamickej sústavy s konštantnými parametrami ak poznáte n vstupov do sústavy $x_k(t)$.

Riešenie.

Vzťah medzi Fourierovými transformáciami n výstupov s n vstupmi lineárnej dynamickej sústavy s konštantnými koeficientami je:

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega),$$

kde vektory $Y(i\omega)$, $X(i\omega)$ a matica $H(i\omega)$ sú stupňa n . Na základe riešenia príkladu 6.4 zo súčiny $[X(i\omega) X^H(i\omega)]$ ($(X)^H = (\bar{X})^T$) vyplýva matica $S_x(i\omega)$ v tvare, v akom bola uvedená v príklade 11.2 a analogicky zo súčiny $[Y(i\omega) Y^H(i\omega)]$ vyplýva matica $S_y(i\omega)$. Využitím týchto súčinov z prvej rovnice vyplýva hľadaný vzťah:

$$S_y(i\omega) = Y(i\omega) Y^H(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega) X^H(i\omega) H^H(i\omega) = H(i\omega) S_x(i\omega) H^H(i\omega).$$

Pr.11.4

Určte rozptyl D_y výstupu $y(t)$ sústavy s n stupňami voľnosti, ak poznáte n vstupov do sústavy $x_k(t)$ a fyzikálne parametre sústavy, koeficientové matice M , B , K , ktoré charakterizujú kmitanie sústavy.

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania lineárnej sústavy s n stupňami voľnosti a s n vstupmi $x_k(t)$ je:

$$M \ddot{\mathbf{q}}(t) + B \dot{\mathbf{q}}(t) + K \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} M \\ q_{j-1}(t) \\ y(t) \\ q_{j+1}(t) \\ M \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} M \\ x_{k-1}(t) \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ M \end{bmatrix}.$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah na základe vzťahu (6.1.a) a riešenia príkladu 6.12 dostaneme:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{F}(i\omega),$$

$$\mathbf{Q}(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega),$$

$$Y(i\omega) = \sum_{j=1}^n H_{jk}(i\omega) X_k(i\omega),$$

kde $Y(i\omega)$, $X_k(i\omega)$ sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$ a vstupov $x_k(t)$ a $H_{jk}(i\omega)$ je j,k -tý prvok matice $\mathbf{H}(i\omega)$ ($\mathbf{H}(i\omega) = \{\mathbf{H}_j(i\omega)\}$, $\mathbf{H}_j(i\omega)$ je j -ty stĺpec matice $\mathbf{H}(i\omega)$). Na základe riešení príkladov 10.2 a 10.4 vzťahy pre strednú hodnotu výstupu m_y a spektrálnu výkonovú hustotu $S_y(\omega)$ sú:

$$m_y = \sum_{j=1}^n H_{jk}(0) m_{xk},$$

$$S_y(\omega) = \mathbf{H}_j(i\omega) \mathbf{S}_x(i\omega) \mathbf{H}_j^H(i\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{H}_{jk}(i\omega) H_{jl}(i\omega) S_{xkxl}(\omega).$$

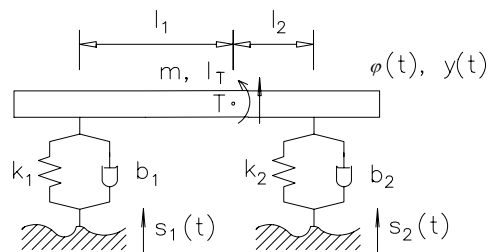
Na základe riešenia príkladu 6.1 dostaneme hľadaný vzťah pre rozptyl výstupu D_y v tvare:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega, -m_y^2.$$

Pr.11.5

Určte rozptyl D_y vychyľiek $y(t)$ sústavy s parametrami m , I_T , b_j , k_j , $j=1,2$ (hmotnosť, moment zotrvačnosti k ťažisku bremena, súčiniteľ viskózneho tlmenia, tuhosť) podľa obrázka č. 14, ak je sústava budená kinematickým buđením $s_j(t)$, s

nulovými strednými hodnotami ($m_{s1} = 0$, $m_{s2} = 0$) a so spektrálnymi výkonovými hustotami $S_{s1}(\omega)$, $S_{s1}(\omega)$, $S_{s1s2}(i\omega)$.



Obr. č. 14

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania sústavy okolo rovnovážnej polohy je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_T \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_2 l_2 - b_1 l_1 \\ b_2 l_2 - b_1 l_1 & b_2 l_2^2 + b_1 l_1^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{s}_1(t) + b_2 \dot{s}_2(t) + k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t) \\ b_2 l_2 \dot{s}_2(t) - b_1 l_1 \dot{s}_1(t) + k_2 l_1 s_2(t) - k_1 l_1 s_1(t) \end{bmatrix}.$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{F}(i\omega),$$

$$\mathbf{Q}(i\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega),$$

$$Y(i\omega) = \sum_{j=1}^{n=2} H_{1j}(i\omega) F_j(i\omega),$$

kde

$$Y(i\omega),$$

$$F_1(i\omega) = (k_1 + i\omega b_1) S_1(i\omega) + (k_2 + i\omega b_2) S_2(i\omega) = A_1(i\omega) S_1(i\omega) + B_1(i\omega) S_2(i\omega),$$

$$F_2(i\omega) = -(k_1 + i\omega b_1) l_1 S_1(i\omega) + (k_2 + i\omega b_2) l_1 S_2(i\omega) = \\ = A_2(i\omega) S_1(i\omega) + B_2(i\omega) S_2(i\omega),$$

$$S_{1,2}(i\omega),$$

sú Fourierove transformácie výstupu $y(t)$, budenia $f(t)$, vstupu $s_{1,2}(t)$ a $H_{1j}(i\omega)$ sú $1, j$ -te prvky matice $\mathbf{H}(i\omega)$. Na základe riešení príkladov 6.6, 6.8, 10.2, 10.4 stredná hodnota výstupu m_y a spektrálna výkonová hustota $S_y(\omega)$ sú:

$$m_y = \sum_{j=1}^{n=2} H_{1j}(0) [A_j(0) m_{s1} + B_j(0) m_{s2}] = 0,$$

$$S_y(\omega) = \sum_{j=1}^{n=2} \sum_{k=1}^{n=2} \bar{H}_{1j}(i\omega) H_{1k}(i\omega) [\bar{A}_j(i\omega) A_k(i\omega) S_{s1}(\omega) + \\ + \bar{B}_j(i\omega) A_k(i\omega) S_{s2s1}(\omega) + \bar{A}_j(i\omega) B_k(i\omega) S_{s1s2}(\omega) + \bar{B}_j(i\omega) B_k(i\omega) S_{s2}(\omega)]$$

a na základe riešenia príkladu 6.1 dostaneme hľadaný vzťah:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

IV. Náhodné kmitanie nelineárnych sústav

Matematický model opisujúci kmitanie nelineárnej sústavy je daný nelineárnou vektorovou obyčajnou nehomogénnou diferenciálnou rovnicou:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}(t) + \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{\phi}(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t), t] = \mathbf{f}(t),$$

kde $\boldsymbol{q}(t)$ a $\mathbf{f}(t)$ sú n - rozmerné vektory zovšeobecnených výchyliek a síl v čase t . Matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} sú štvorcové matice stupňa n reprezentujúce fyzikálne parametre sústavy. Sústavy, ktorých matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} sú nezávislé na čase t a vektor $\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{\phi}(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t), t] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{\phi}(t), \dot{\boldsymbol{\phi}}(t)]$, sú sústavy s konštantnými koeficientami. V ďalšom, ak nebude výslovne povedané inak, sa budeme zaoberať sústavami s konštantnými koeficientami.

Pre nelineárne sústavy neplatí princíp superpozície a v prípade, ak na vstupe $\mathbf{f}(t)$ do lineárnej sústavy je náhodný proces s normálnym rozdelením, tak na výstupe $\boldsymbol{q}(t)$ zo sústavy nebude náhodný proces s normálnym rozdelením.

12. Metóda štatistickej linearizácie

Metódou štatistickej linearizácie sa aproximuje nelineárna funkcia $\varphi[\boldsymbol{x}(t), x(t)]$ lineárnou funkciou $\varphi_l[\boldsymbol{x}(t), x(t)]$, pričom ako kritérium zhody sa používa podmienka minima funkcie v tvare:

$$\varphi[\boldsymbol{x}(t), x(t)] = \varphi_l[\boldsymbol{x}(t), x(t)], \quad (12.1)$$

$$M\{Z[\boldsymbol{x}(t), x(t)]^2\} = \min, \quad (12.2)$$

kde

$$Z[\boldsymbol{x}(t), x(t)] = \varphi[\boldsymbol{x}(t), x(t)] - \varphi_l[\boldsymbol{x}(t), x(t)]. \quad (12.3)$$

S využitím metódy štatistickej linearizácie pri riešení nelineárnych sústav s náhodnými vstupmi dostávame len približné riešenia, ktorých hodnoty sú väčšinou menšie ako skutočné, pričom odhadnutie presnosti riešenia je problematické. Akceptovateľné výsledky dostávame v prípade rozsiahlych obmedzení, napríklad malosť nelineárnych členov, blízkosť hustoty pravdepodobnosti výstupu normálnemu rozdeleniu.

Príklady

Pr.12.1

Linearizujte nelineárnu funkciu $\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)]$ metódou štatistickej linearizácie, ak výchylka $y(t)$ je stacionárny náhodný proces so známym zákonom rozdelenia $f[\mathfrak{z}(t), y(t)]$.

Riešenie

Linearizujme nelineárnu funkciu $\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)]$ pomocou lineárnych členov Taylorovho rozvoja v okolí bodou $\mathfrak{z}(t) = 0$, $y(t) = m_y$, procesu $y(t) = m_y + y_c(t)$, kde m_y , $m_{\mathfrak{z}}$ sú stredné hodnoty výchylky a rýchlosti (pre stacionárny proces zo vzťahu (4.3) vyplýva: $m_{\mathfrak{z}} = 0$):

$$\begin{aligned} \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] &\approx \varphi(0, m_y) + \varphi_1(0, m_y) y_c(t) + \varphi_2(0, m_y) \mathfrak{z}_c(t) = \\ &= a_0 + a_1 y_c(t) + a_2 \mathfrak{z}_c(t), \end{aligned}$$

kde

$$\varphi_1[\mathfrak{z}(t), y(t)] = \frac{\partial}{\partial y} \{ \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] \}, \quad \varphi_2[\mathfrak{z}(t), y(t)] = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} \{ \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] \},$$

Na základe vzťahu (12.2) je:

$$M\{\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)]^2 - 2\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] [a_0 + a_1 y_c(t) + a_2 \mathfrak{z}_c(t)] + [a_0 + a_1 y_c(t) + a_2 \mathfrak{z}_c(t)]^2\} = \min,$$

z čoho vyplývajú rovnosti:

$$\frac{\partial M[L]}{\partial a_j} = 0, \quad j=0,1,2,$$

na základe ktorých po zohľadnení nekorelovanosti stacionárnych náhodných procesov $y_c(t)$ a $\mathfrak{z}_c(t)$ (pozri príklad 4.8) a nulovej strednej hodnoty centrovaneho náhodného procesu (pozri príklad 2.3) dostaneme hľadané konštanty:

$$a_0 = M\{\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] f[\mathfrak{z}(t), y(t)] dy d\mathfrak{z},$$

$$a_1 = \frac{1}{D_y} M\{\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] y_c(t)\} = \frac{1}{D_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] y_c(t) f[\mathfrak{z}(t), y(t)] dy d\mathfrak{z},$$

$$a_2 = \frac{1}{D_{\mathfrak{z}}} M\{\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] \mathfrak{z}_c(t)\} = \frac{1}{D_{\mathfrak{z}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)] \mathfrak{z}_c(t) f[\mathfrak{z}(t), y(t)] dy d\mathfrak{z}.$$

Pr.12.2

Nájdite rozptyl D_y , $D_{\mathfrak{z}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\mathfrak{z}(t)$, ak poznáte strednú hodnotu m_x a spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega)$ budenia $x(t)$ pre sústavu s jedným stupňom voľnosti, ktorá je opísaná diferenciálnou rovnicou (12.1), pričom nelineárnu funkciu $\varphi[\mathfrak{z}(t), y(t)]$ linearizujte spôsobom uvedeným v príklade (12.1).

Riešenie

Na základe riešenia príkladu (12.1) je:

$$m \mathfrak{z}_c(t) + (b + a_2) \mathfrak{z}_c(t) + (k + a_1) y_c(t) + k m_y + a_0 = m_x + x_c(t),$$

$$k m_y + a_0 = m_x,$$

$$m \ddot{y}_c(t) + (b + a_2) \dot{y}_c(t) + (k + a_1) y_c(t) = x_c(t).$$

Na základe posledných dvoch rovníc analogicky ako pri riešení príkladu 10.8 pre rozptyly výchyliek a rýchlosti D_y , $D_{\dot{y}}$ je:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega - m_y^2,$$

$$D_{\dot{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 S_x(\omega) d\omega,$$

kde pre strednú hodnotu m_y a prenos $H(i\omega)$ je:

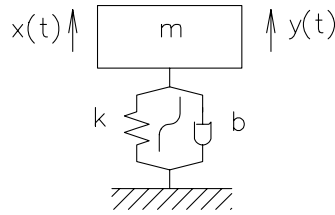
$$m_y = \frac{m_x - a_0}{k},$$

$$H(i\omega) = [(k + a_1) - \omega^2 m + i \omega (b + a_2)]^{-1}.$$

Pr.12.3

Nájdite rozptyly D_y , $D_{\dot{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\dot{y}(t)$, ak poznáte strednú hodnotu $m_x = 0$ a spektrálnu výkonovú hustotu $S_x(\omega) = A$ stacionárneho náhodného budenia $x(t)$ sústavy (obrázok č.15), ktorá je tvorená bremenom zanedbateľných rozmerov o hmotnosti m , ktoré je spojené s nehybným základom tlmičom s koeficientom viskózneho tlmenia b a s pružinou, ktorá má nelineárnu charakteristiku s tuhosťou $k_g = k + \varepsilon y^2$. Uvažujte, že hustotu rozdelenia náhodnej výchylky môžete aproximovať normálnym rozdelením v tvare:

$$f[y(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} e^{-\frac{[y(t)-m_y]^2}{2D_y}}.$$



Obr. č. 15

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania skúmanej sústavy je:

$$m \ddot{y}(t) + b \dot{y}(t) + k y(t) + \varepsilon y(t)^3 = x(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.1 linearizujeme nelineárnu rovnicu metódou štatistickej linearizácie. V našom prípade nelineárna funkcia $\varphi[y(t)]$ a jej lineárna aproximácia $\varphi_l[y(t)]$ sú:

$$\varphi[y(t)] = \varepsilon y(t)^3 \approx \varphi_l[y(t)] = a_0 + a_1 y_c(t),$$

kde

$$a_0 = M\{\varphi[y(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[y(t)] f[y(t)] dy = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi D_y}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^3 e^{-\frac{[y(t)-m_y]^2}{2D_y}} dy,$$

$$a_1 = \frac{1}{D_y} M\{\varphi[y(t)] y_c(t)\} = \frac{1}{D_y} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[y(t)] [y(t) - m_y] f[y(t)] dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi D_y^3}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^3 [y(t) - m_y] e^{-\frac{[y(t)-m_y]^2}{2D_y}} dy.$$

Vyčíslením integrálov analogicky ako pri riešení príkladu 2.8 dostaneme:

$$a_0 = \varepsilon m_y (m_y^2 + 3 D_y),$$

$$a_1 = 3\varepsilon (m_y^2 + 2 D_y).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.2 linearizovaná rovnica je:

$$m \ddot{y}_c(t) + b \dot{y}_c(t) + (k + a_1) y_c(t) + k m_y + a_0 = m_x + x_c(t),$$

kde $y_c(t)$, $x_c(t)$ sú centrované náhodné procesy. Na jej základe je:

$$m_y [k + \varepsilon (m_y^2 + 3 D_y)] = m_x, \quad (\text{a})$$

$$m \ddot{y}_c(t) + b \dot{y}_c(t) + [k + 3\varepsilon (m_y^2 + 2 D_y)] y_c(t) = x_c(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.8 prenos $H(i\omega)$ a rozptyly D_y , $D_{\dot{y}}$ sú:

$$H(i\omega) = \{[k + 3\varepsilon (m_y^2 + 2 D_y)] - \omega^2 m + i \omega b\}^{-1},$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 A d\omega - m_y^2 = A \{2 b [k + 3\varepsilon (m_y^2 + 2 D_y)]\}^{-1} - m_y^2, \quad (\text{b})$$

$$D_{\dot{y}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 A d\omega = A (2 b m)^{-1}. \quad (\text{c})$$

Riešením rovníc (a), (b) možno nájsť hľadanú strednú hodnotu m_y a rozptyl D_y výchylky $y(t)$ a priamo z rovnice (c) rozptyl $D_{\dot{y}}$ rýchlosti $\dot{y}(t)$. Na základe $m_x = 0$ je $m_y = 0$, rozptyl D_y možno určiť riešením nelineárnej rovnice (b).

Pr.12.4

Nájdite rozptyly D_y , $D_{\dot{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\dot{y}(t)$, ak poznáte strednú hodnotu $m_x = 0$ a korelačnú funkciu $R_x(\tau) = D_x e^{-a|\tau|}$ stacionárneho náhodného budenia $x(t)$ pre sústavu podľa obrázka č.15, ktorá je tvorená bremenom zanedbateľných rozmerov s hmotnosťou m , ktoré je spojené s nehybným základom tmičom, ktorý má nelineárnu charakteristiku s tlmením $b_g = b \operatorname{sign}(\dot{y}) \dot{y}$ a s pružinou s tuhosťou k . Uvažujte, že hustotu rozdelenia náhodnej výchylky môžete aproximovať normálnym rozdelením v tvare:

$$f[\dot{y}(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\dot{y}}}} e^{-\frac{[\dot{y}(t)]^2}{2D_{\dot{y}}}}.$$

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania skúmanej sústavy je:

$$m \ddot{y}(t) + b \operatorname{sign}[\dot{y}(t)] \dot{y}(t)^2 + k y(t) = x(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.1 linearizujeme nelineárnu rovnicu metódou štatistickej linearizácie. V našom prípade majú nelineárna funkcia $\varphi[y(t)]$ a jej lineárna aproximácia $\varphi_l[y(t)]$ tvar:

$$\varphi[\dot{y}(t)] = b \operatorname{sign}[\dot{y}(t)] \dot{y}(t)^2 \approx \varphi_l[\dot{y}(t)] = a_0 + a_2 \dot{y}_c(t),$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= M\{\varphi[\dot{y}(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\dot{y}(t)] f[\dot{y}(t)] d\dot{y} = \\ &= \frac{b}{\sqrt{2\pi D_{\dot{y}}}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}[\dot{y}(t)] \dot{y}(t)^2 e^{-\frac{[\dot{y}(t)]^2}{2D_{\dot{y}}}} d\dot{y}, \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{D_{\dot{y}}} M\{\varphi[\dot{y}(t)] \dot{y}_c(t)\} = \frac{1}{D_{\dot{y}}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[\dot{y}(t)] \dot{y}(t) f[\dot{y}(t)] d\dot{y} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{2\pi D_{\mathfrak{g}}^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}[\mathfrak{g}(t)] \mathfrak{g}(t)^2 \mathfrak{g}(t) e^{-\frac{|\mathfrak{g}(t)|}{2D_{\mathfrak{g}}}} d\mathfrak{g}.$$

Vyčíslením integrálov je:

$$a_0 = 0,$$

$$a_2 = 4 b D_{\mathfrak{g}} (2 \pi m^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.2 je linearizovaná rovnica:

$$m \mathfrak{g}_c(t) + a_2 \mathfrak{g}_c(t) + k [m_y + y_c(t)] = m_x + x_c(t),$$

kde $y_c(t)$, $x_c(t)$ sú centrované náhodné procesy. Na jej základe:

$$k m_y = m_x, \tag{a}$$

$$m \mathfrak{g}_c(t) + 4 b D_{\mathfrak{g}} (2 \pi m^2)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{g}_c(t) + k y_c(t) = x_c(t).$$

Po zohľadnení riešenia príkladu 6.11., na základe ktorého vyjadrenie spektrálnej výkonovej hustoty $S_x(\omega)$ budenia $x(t)$ je:

$$S_x(\omega) = 2 \alpha D_x (a^2 + \omega^2)^{-1},$$

analogicky ako pri riešení príkladu 10.8 prenos $H(i\omega)$ a rozptyly D_y , $D_{\mathfrak{g}}$ sú:

$$H(i\omega) = [k - \omega^2 m + i \omega 4 b D_{\mathfrak{g}} (2 \pi m^2)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}, \tag{a}$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 2 \alpha D_x (a^2 + \omega^2)^{-1} d\omega - m_y^2 =$$

$$= 2 \sqrt{\pi} m D_x (m \alpha + 4 b \frac{D_y}{\sqrt{2\pi}}) [\sqrt{2} k D_{\mathfrak{g}} (k + m \alpha^2 + 4 b \alpha \frac{D_y}{\sqrt{2\pi}})]^{-1} - m_y^2, \quad (\text{b})$$

$$D_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 2 \alpha D_x (a^2 + \omega^2)^{-1} d\omega =$$

$$= \sqrt{\pi} m \alpha D_x [\sqrt{2} D_{\mathfrak{g}} (k + m \alpha^2 + 4 b \alpha D_{\mathfrak{g}} / \sqrt{2\pi})]^{-1}. \quad (\text{c})$$

Riešením nelineárnych rovníc (a), (b) a nelineárnej rovnice (c) možno nájsť hľadanú strednú hodnotu m_y a rozptyl D_y výchylky $y(t)$ a rozptyl $D_{\mathfrak{g}}$ rýchlosti $\mathfrak{g}(t)$.

Pr.12.5

Nájdite strednú hodnotu m_y a rozptyl D_y výchylky $y(t)$, ak poznáte strednú hodnotu $m_x = 0$ a kovariančnú funkciu $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ stacionárneho náhodného budenia $x(t)$ pre sústavu na obrázku č. 15, ktorá je tvorená bremenom zanedbateľných rozmerov s hmotnosťou m , ktoré je spojené s nehybným základom tlmičom so súčiniteľom viskózneho tlmenia b a s pružinou s tuhosťou k_1 , pričom s pružinou s tuhosťou k_2 sa spojí až keď sa vychýli o vzdialenosť d . Uvažujte, že hustotu rozdelenia náhodnej výchylky môžete aproximovať normálnym rozdelením v tvare:

$$f[y(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} e^{-\frac{[y(t)-m_y]^2}{2D_y}}.$$

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania skúmanej sústavy je:

$$m \ddot{\mathfrak{g}}(t) + b \dot{\mathfrak{g}}(t) + k_1 y(t) + \varphi[y(t)] = x(t),$$

kde

$$\varphi[y(t)] = \begin{cases} k_2(y + d), & y < -d \\ 0, & |y| \leq d \\ k_2(y - d), & y > d \end{cases}$$

Analogicky ako v príklade 10.1 linearizujeme nelineárnu rovnicu metódou štatistickej linearizácie. V našom prípade majú nelineárna funkcia $\varphi[y(t)]$ a jej lineárna aproximácia $\varphi_l[y(t)]$ tvar:

$$\varphi[y(t)] \approx \varphi_l[y(t)] = a_0 + a_1 y_c(t),$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= M\{\varphi[y(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[y(t)] f[y(t)] dy = \frac{k_2}{\sqrt{2\pi D_y}} \left\{ \int_{-\infty}^{-d} [y(t) + d] e^{-\frac{[y(t)-m_y]}{2D_y}} dy + \right. \\ &+ \int_d^{\infty} [y(t) - d] e^{-\frac{[y(t)-m_y]}{2D_y}} dy \left. \right\} = k_2 \left\{ m_y - u_1 \Phi\left(\frac{u_1}{\sqrt{D_y}}\right) + u_2 \Phi\left(\frac{u_2}{\sqrt{D_y}}\right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{D_y}{2\pi}} [e^{-u_2^2/(2D_y)} - e^{-u_1^2/(2D_y)}] \right\}, \end{aligned}$$

kde $\Phi(u)$ analogicky ako v príklade 1.12 je Laplaceova funkcia,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{D_y} M\{\varphi[y(t)] y_c(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[y(t)] [y(t) - m_y] f[y(t)] dy = \\ &= \frac{k_2}{\sqrt{2\pi D_y}} \left\{ \int_{-\infty}^{-d} [y(t) + d] [y(t) - m_y] e^{-\frac{[y(t)-m_y]}{2D_y}} dy + \right. \\ &+ \left. \int_d^{\infty} [y(t) - d] [y(t) - m_y] e^{-\frac{[y(t)-m_y]}{2D_y}} dy \right\} = k_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{u_1}{\sqrt{D_y}}\right) - \Phi\left(\frac{u_2}{\sqrt{D_y}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.2 linearizovaná rovnica je:

$$m \ddot{y}_c(t) + b \dot{y}_c(t) + (k_1 + a_1) y_c(t) + k_1 m_y + a_0 = m_x + x_c(t),$$

kde $y_c(t)$, $x_c(t)$ sú centrovane náhodné procesy. Na jej základe je:

$$m_y (k + \alpha_1) = m_x, \quad (a)$$

$$m \mathfrak{F}_c(t) + b \mathfrak{X}_c(t) + \{k_1 + k_2 [1 - \Phi(\frac{u_1}{\sqrt{D_y}}) - \Phi(\frac{u_2}{\sqrt{D_y}})]\} y_c(t) = x_c(t).$$

Analogicky ako v príklade 10.8 nájdeme prenos $H(i\omega)$ a na základe riešenia príkladu

6.12. spektrálna výkonová hustota je:

$$S_x(\omega) = 2 \alpha D_x (a^2 + \omega^2)^{-1}.$$

Pre rozptyl D_y platí:

$$H(i\omega) = \{k + k_2 [1 - \Phi(\frac{u_1}{\sqrt{D_y}}) - \Phi(\frac{u_2}{\sqrt{D_y}})] - \omega^2 m + i \omega b\}^{-1},$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 2 \alpha D_x (a^2 + \omega^2)^{-1} d\omega. \quad (b)$$

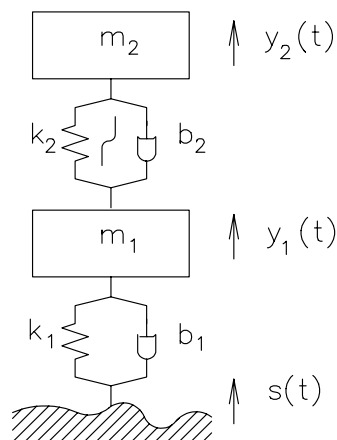
Riešením rovníc (a), (b) možno nájsť hľadanú strednú hodnotu m_y a rozptyl D_y výchylky $y(t)$. Analýzou rovnice (a) možno zistiť, že funkcia $m_y = \varphi(m_x)$ sa bude nachádzať v oblasti vymedzenej medznými stavmi:

a) $d = 0$ (lineárna sústava), $m_y = m_x$,

b) $D_y = 0$ (sústava je v pokoji), $m_y = m_x + d \operatorname{sign}(m_x)$.

Pr.12.6

Určite rozptyl výchyliek D_{y2} sústavy s parametrami m_j , $b_{gi} = b_i + \psi_i(\mathfrak{X})$, $k_{gi} = k_i + \varphi_i(y)$, ($j=1,2$, $\psi_1(\mathfrak{X}) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$) podľa obrázka č. 16, ak je sústava budená kinematickým budením $s(t)$ s nulovou strednou hodnotou ($m_s = 0$) a so spektrálnou výkonovou hustotou $S_s(\omega)$.



Obr. č. 16

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania bremien okolo rovnovážnej polohy je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{q}}(t)] + \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t)] = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t)] = \begin{bmatrix} -\varphi_2 [y_2(t) - y_1(t)] \\ \varphi_2 [y_2(t) - y_1(t)] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{q}}(t)] = \begin{bmatrix} -\psi_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] \\ \psi_2 [\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{s}(t) + k_1 s(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Využitím transformácie súradníc (relatívne posunutia) keď:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{T} \mathbf{q}_r(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1r}(t) \\ y_{2r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} s(t),$$

pre uvedený vzťah platí:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{x}}_r(t) + \mathbf{B}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r(t) + \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}_r(t)] + \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{f}_r(t),$$

kde

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \mathbf{B}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} = \text{diag}(b_j), \mathbf{K}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \text{diag}(k_j),$$

$$\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}_r(t)] = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\psi}[\mathbf{q}(t)] = \text{diag}\{\psi_j[x_{jr}(t)]\}, \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t)] = \\ = \text{diag}\{\varphi_j[y_{jr}(t)]\},$$

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f}.$$

Na základe riešenia príkladov (12.1-2) možno linearizovať nelineárne funkcie:

$$\psi_2[x_{2r}(t)] \approx a_2 x_{2r}(t), \varphi_2[y_{2r}(t)] \approx a_1 y_{2r}(t),$$

čím dostaneme linearizovaný vzťah s diagonálnymi maticami:

$$\mathbf{B}_{rl} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_{g2l} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{rl} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_{g2l} \end{bmatrix}.$$

Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(\mathbf{K}_{rl} - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_{rl}) \mathbf{Q}_r(i\omega) = \mathbf{F}_r(i\omega) = \mathbf{F}(i\omega),$$

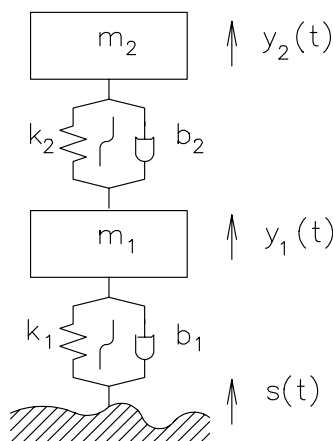
$$\mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{T} \mathbf{Q}_r(i\omega) = \mathbf{T} (\mathbf{K}_{rl} - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_{rl})^{-1} \mathbf{F}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}(i\omega),$$

$$Y_2(i\omega) = H_{21}(i\omega) F_1(i\omega),$$

($F_1(i\omega) = (k_1 + i\omega b_1) S(i\omega)$) čo je analogický vzťah ako v príklade 10.15. Analogickým postupom dostaneme vzťah pre vyjadrenie rozptylu D_{y_2} , ktorý však v tomto prípade bude nelineárny.

Pr.12.7

Určite rozptyl D_{y_2} výchylky $y_2(t)$ sústavy s parametrami m_j , $b_{gj} = b_j + \psi_j(\dot{y}^2)$, $k_{gj} = k_j + \varphi_j(y^2)$, ($j=1,2$), podľa obrázka č. 17, ak je sústava buďená kinematickým buđením $s(t)$ s nulovou strednou hodnotou ($m_s = 0$) a so spektrálnou výkonovou hustotou $S_s(\omega)$.



Obr. č. 17

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania bremena okolo rovnovážnej polohy je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{s}}(t)] + \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t), s(t)] = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{\Phi}(t), \boldsymbol{\mathfrak{z}}(t)] = \begin{bmatrix} \psi_1[y_1(t) - \boldsymbol{\mathfrak{z}}(t)] - \psi_2[y_2(t) - y_1(t)] \\ \psi_2[y_2(t) - y_1(t)] \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t), s(t)] = \begin{bmatrix} \varphi_1[y_1(t) - s(t)] - \varphi_2[y_2(t) - y_1(t)] \\ \varphi_2[y_2(t) - y_1(t)] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \boldsymbol{\mathfrak{z}}(t) + k_1 s(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Využitím transformácie súradníc (relatívne posunutia), keď:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{T} \mathbf{q}_r(t) + \mathbf{t} s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1r}(t) \\ y_{2r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} s(t),$$

pre uvedený vzťah platí:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\boldsymbol{\Phi}}_r(t) + \mathbf{B}_r \dot{\boldsymbol{\Phi}}_r(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r(t) + \boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{\Phi}_r(t)] + \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{f}_r(t),$$

kde

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} = \text{diag}(b_j), \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \text{diag}(k_j),$$

$$\boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{\Phi}_r(t)] = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\psi}[\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\mathfrak{z}}(t)] = \text{diag}\{\psi_j[y_{jr}(t)]\},$$

$$\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{q}(t), s(t)] = \text{diag}\{\varphi_j[y_{jr}(t)]\},$$

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f} - \mathbf{T}^T [\mathbf{M} \mathbf{t} \ddot{\boldsymbol{\mathfrak{z}}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{t} \dot{\boldsymbol{\mathfrak{z}}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{t} s(t)] = -\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{t} \ddot{\boldsymbol{\mathfrak{z}}}(t).$$

Využitím riešenia príkladov (12.1-2) možno linearizovať nelineárne funkcie:

$$\psi_{il}[y_{ir}(t)] \approx a_{2i} y_{ir}(t), \quad \varphi_{li}[y_{ir}(t)] \approx a_{1i} y_{ir}(t),$$

čím dostaneme linearizovaný vzťah s diagonálnymi maticami $\mathbf{B}_{rl} = \text{diag}(b_{gil})$, $\mathbf{K}_{rl} = \text{diag}(k_{gil})$. Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(\mathbf{K}_{rl} - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_{rl}) \mathbf{Q}_r(i\omega) = \mathbf{F}_r(i\omega),$$

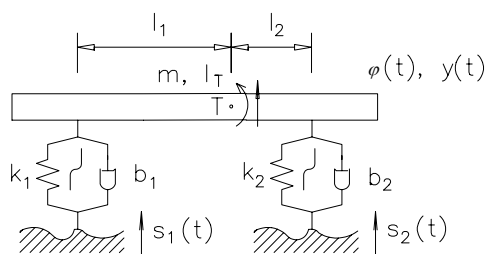
$$\mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{T} (\mathbf{K}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_r)^{-1} \mathbf{F}_r(i\omega) + \mathbf{t} S(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}_r(i\omega) + \mathbf{t} S(i\omega),$$

$$Y_2(i\omega) = H_{21}(i\omega) F_{1r}(i\omega) + H_{22}(i\omega) F_{2r}(i\omega) + S(i\omega) = H_g(i\omega) S(i\omega),$$

čo je analogický vzťah ako v príklade 10.15. Analogickým postupom dostaneme vzťah pre vyjadrenie rozptylu D_{y2} , ktorý však v tomto prípade bude nelineárny.

Pr.12.8

Určite rozptyl D_y , výchylky $y(t)$ sústavy s parametrami m , I_T , $b_{gj} = b_j + \psi_j(y^2)$, $k_{gj} = k_j + \vartheta_j(y^2)$, ($j=1,2$) podľa obrázka č. 18, ak je sústava budená kinematickým budením $s_j(t)$ s nulovými strednými hodnotami ($m_{s1} = 0$, $m_{s2} = 0$) a so spektrálnymi výkonovými hustotami $S_{s1}(\omega)$, $S_{s1}(\omega)$, $S_{s1s2}(i\omega)$.



Obr. č. 18

Riešenie.

Pohybová rovnica kmitania sústavy okolo rovnovážnej polohy je:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{s}(t)] + \mathcal{G}[\mathbf{q}(t), \mathbf{s}(t)] = \mathbf{f}(t),$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & I_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_2 l_2 - b_1 l_1 \\ b_2 l_2 - b_1 l_1 & b_2 l_2^2 + b_1 l_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{s}(t)] = \begin{bmatrix} \psi_1[\dot{x}(t) - \dot{s}_1(t) - \varphi l_1(t)] + \psi_2[\dot{x}(t) - \dot{s}_2(t) + \varphi l_2(t)] \\ -\psi_1 l_1[\dot{x}(t) - \dot{s}_1(t) - \varphi l_1(t)] + \psi_2 l_2[\dot{x}(t) - \dot{s}_2(t) + \varphi l_2(t)] \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}[\mathbf{q}(t), \mathbf{s}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1[y(t) - s_1(t) - \varphi l_1(t)] + \mathcal{G}_2[y(t) - s_2(t) + \varphi l_2(t)] \\ -\mathcal{G}_1 l_1[y(t) - s_1(t) - \varphi l_1(t)] + \mathcal{G}_2 l_2[y(t) - s_2(t) + \varphi l_2(t)] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{x}(t) + b_2 \dot{s}_2(t) + k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t) \\ b_2 l_2 \dot{s}_2(t) - b_1 l_1 \dot{x}(t) + k_2 l_1 s_2(t) - k_1 l_1 s_1(t) \end{bmatrix}.$$

Využitím transformácie súradníc, kde:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{T} [\mathbf{q}_r(t) + \mathbf{s}(t)] = \frac{1}{l_1 + l_2} \begin{bmatrix} l_2 & l_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1r}(t) \\ y_{2r}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{s}(t),$$

pre uvedený vzťah platí:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{x}}_r(t) + \mathbf{B}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_r(t) + \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{x}}_r(t)] + \mathcal{G}[\mathbf{q}_r(t)] = \mathbf{f}_r(t),$$

kde

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} = \text{diag}(b_j), \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \text{diag}(k_j),$$

$$\boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{x}}_r(t)] = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\psi}[\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{s}(t)] = \text{diag}[\psi_j(\dot{x}_{jr})],$$

$$\mathcal{G}[q_r(t)] = \mathbf{T}^T \mathcal{G}[q(t), s(t)] = \text{diag}[\mathcal{G}_j(y_{jr})],$$

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f} - \mathbf{T}^T [\mathbf{M} \mathbf{T} \mathfrak{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathfrak{Z}(t) + \mathbf{K} \mathbf{T} s(t)] = -\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \mathfrak{X}(t).$$

Využitím riešenia príkladov (12.1-2) možno linearizovať nelineárne funkcie:

$$\psi_i[\mathfrak{X}_{ir}(t)] \approx a_{2i} \mathfrak{X}_{ir}(t), \quad \varphi_i[y_{ir}(t)] \approx a_{1i} y_{ir}(t),$$

čím dostaneme linearizovaný vzťah s diagonálnymi maticami $\mathbf{B}_{rl} = \text{diag}(b_{gil})$, $\mathbf{K}_{rl} = \text{diag}(k_{gil})$. Aplikovaním Fourierovej transformácie na uvedený vzťah dostaneme:

$$(\mathbf{K}_{rl} - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_{rl}) \mathbf{Q}_r(i\omega) = \mathbf{F}_r(i\omega),$$

$$\mathbf{Q}(i\omega) = \mathbf{T} (\mathbf{K}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r + i\omega \mathbf{B}_r)^{-1} \mathbf{F}_r(i\omega) + \mathbf{T} \mathbf{S}(i\omega) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{F}_r(i\omega) + \mathbf{T} \mathbf{S}(i\omega),$$

$$Y(i\omega) = \sum_{j=1}^{n=2} H_{glj}(i\omega) S_j(i\omega),$$

čo je analogický vzťah ako v príklade 11.6. Analogickým postupom dostaneme vzťah pre vyjadrenie rozptylu D_y , ktorý však v tomto prípade bude nelineárny.

Pr.12.9

Určite rozptyl $D_q(t)$ výchyliek $q(t)$ sústavy opísanej v príklade 9.1, ak odporový moment je kvadratickou funkciou výchylky.

Riešenie.

Na základe príkladu 9.1 pohybová rovnica kolísanie uhlovej rýchlosti je:

$$\mathfrak{Q}(t) = -k q(t) - h \text{sign}[q(t)] q(t)^2 + \xi(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladov 10.1-4 linearizujeme nelineárnu rovnicu metódou štatistickej linearizácie. Nelineárna funkcia $\varphi[q(t)]$ a jej lineárna aproximácia $\varphi_l[q(t)]$ majú tvar:

$$\varphi[q(t)] = h \operatorname{sign}[q(t)] q(t)^2 \approx \varphi_l[q(t)] = a_0 + a_1 q_c(t),$$

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 4 h \sqrt{\frac{D_q}{2\pi}}.$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 10.9 nájdeme prenos $H(i\omega)$ a rozptyl D_q v tvare nelineárnej rovnice:

$$H(i\omega) = [k + 4 h \sqrt{\frac{D_q}{2\pi}} + i \omega]^{-1},$$

$$D_q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 A d\omega - m_y^2 = A [2 (k + 4 h \sqrt{\frac{D_q}{2\pi}})]^{-1}.$$

13. Využitie Markovových procesov

Riešenie diferenciálnej rovnice:

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) + \sum_{k=1}^{2n} \psi_{jk}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t) \xi_k(t), \quad j = 1, 2, \dots, 2n,$$

kde $\xi_j(t)$ je stacionárny biely šum s normálnym rozdelením, so strednou hodnotou $m_{\xi_j} = 0$ a s kovariančnými funkciami $K_{\xi_j \xi_j}(\tau) = A_{jk} \delta(\tau)$, $K_{\xi_j \xi_k}(\tau) = 0$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, je Markovov proces. Využitím Markovových procesov možno nájsť presné riešenie uvedenej rovnice. Avšak známy je len obmedzený počet analyticky riešiteľných úloh.

Príklady

Pr.13.1

Nájdite ustálené rozptyly D_y , $D_{\mathfrak{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\mathfrak{y}(t)$ sústavy opísanej v príklade 12.3 využitím Markovových procesov.

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania skúmanej sústavy je:

$$\ddot{\mathfrak{y}}(t) + 2 \delta \dot{\mathfrak{y}}(t) + \omega_0^2 y(t) + \varepsilon y(t)^3 = x(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 7.3 dostaneme druhú Kolmogorovovú rovnicu v tvare ($\mathfrak{y}(t) = x_1(t)$, $y(t) = x_2(t)$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-2\delta x_1 - \omega_0^2 x_2 - \varepsilon x_2^3) f}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1 f)}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(A f)}{\partial x_1^2} = 0,$$

z ktorej pre stacionárny prípad vyplynie:

$$-2 \delta f - 2 \delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (\omega_0^2 x_2 + \varepsilon x_2^3) \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{1}{2} A \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} [(\omega_0^2 x_2 + \varepsilon x_2^3) f + \frac{A}{4 \delta} \frac{\partial f}{\partial x_2}] + (-\frac{\partial}{\partial x_2} + 2 \delta \frac{\partial}{\partial x_1}) (x_1 f + \frac{A}{4 \delta} \frac{\partial f}{\partial x_1}) = 0,$$

Pre nezávisle x_1 a x_2 platí:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{f_1 [(\omega_0^2 x_2 + \varepsilon x_2^3) f_2 + \frac{A}{4 \delta} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}]\} + (-\frac{\partial}{\partial x_2} + 2 \delta \frac{\partial}{\partial x_1}) [f_2 (x_1 f_1 + \frac{A}{4 \delta} \frac{\partial f_1}{\partial x_1})] = 0.$$

Táto rovnosť je splnená, ak platia vzťahy:

$$\frac{df_1}{dx_1} + \frac{4 \delta}{A} x_1 f_1 = 0,$$

$$\frac{df_2}{dx_2} + \frac{(\omega_0^2 x_2 + \varepsilon x_2^3) 4 \delta}{A} f_2 = 0,$$

z ktorých vyplýva:

$$f_1 = c_1 e^{-\frac{4\delta}{2A} x_1^2},$$

$$f_2 = c_2 e^{-\frac{4\delta}{2A} \omega_0^2 x_2^2} e^{-\frac{4\delta}{4A} \varepsilon x_2^4},$$

Na základe vzťahu (1.17) a riešenia príkladov (2.8) a (1.12) nájdeme konštanty c_1, c_2 v tvare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_1 e^{-\frac{4\delta}{2A} x_1^2} dx_1 = 1,$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\delta}{\pi A}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_2 e^{-a(\omega_0^2 + \frac{\varepsilon}{2} x_2^2) x_2^2} dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} c_2 e^{-a \omega_0^2 x_2^2} [1 - \frac{a\varepsilon}{2} x_2^4 + \frac{1}{2} (\frac{a\varepsilon}{2})^2 x_2^8 \dots] dx_2 = 1,$$

$$c_2 = \{\sqrt{\pi} [\frac{1}{(a \omega_0^2)^{1/2}} - \frac{a\varepsilon}{4(a \omega_0^2)^{5/2}} + \frac{a^2 \varepsilon^2 210}{2^7 (a \omega_0^2)^{9/2}} \dots]\}^{-1},$$

kde $a = \frac{2\delta}{A}$. Na základe vzťahu (6.1) rozptyly $D_y, D_{\mathfrak{K}}$ sú:

$$D_y = \frac{A}{4\delta\omega_0^2} \frac{1 - \frac{15}{8}\varepsilon + \frac{15}{4}\varepsilon^2 \dots}{1 - \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{105}{64}\varepsilon^2 \dots},$$

$$D_{\mathfrak{K}} = \frac{A}{2\delta}.$$

Pr.13.2

Nájdite ustálené rozptyly D_y , $D_{\dot{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\dot{y}(t)$ sústavy opísanej v príklade 12.4 využitím Markovových procesov.

Riešenie

Pohybová rovnica kmitania sústavy je:

$$\ddot{y}(t) + 2 \delta \operatorname{sign}[\dot{y}(t)] \dot{y}(t)^2 + \omega_0^2 y(t) = \xi(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 7.3 vyjadríme náhodný proces $x(t)$ s korelačnou funkciou $K_x(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}$ pomocou náhodného procesu $\xi(t)$ typu bieleho šumu so spektrálnou výkonovou hustotou $S_\xi(\omega) = A$ v tvare :

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) = \sqrt{2 \alpha A} \xi(t).$$

Analogicky ako pri riešení príkladu 7.3 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare ($\dot{y}(t) = x_1(t)$, $y(t) = x_2(t)$, $\dot{x}(t) = x_3(t)$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\alpha - 2\delta \operatorname{sign} x_1 x_1^2 - \omega_0^2 x_2 - x_3}{\dot{x}_1} f + \frac{\partial(x_1 f)}{\dot{x}_2} + \frac{\partial(-\alpha x_3 f)}{\dot{x}_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(2 \alpha A f)}{\dot{x}_3^2} = 0,$$

Analyticky riešiť obdobné prípady je obtiažne, ale numericky obdobne ako v predchádzajúcom príklade možno nájsť ustálené rozptyly D_y , $D_{\dot{y}}$ výchylky $y(t)$ a rýchlosti $\dot{y}(t)$ skúmanej sústavy.

Pr.13.3

Určite rozptyl $D_q(t)$ výchyliek $q(t)$ dynamickej sústavy opísanej v príklade 9.1 využitím Markovových procesov, ak odporový moment je kvadratickou funkciou výchylky.

Riešenie.

Na základe riešenia príkladu 8.1 kolísanie uhlovej rýchlosti je:

$$\Phi(t) = -k q(t) - h \operatorname{sign}[q(t)] q(t)^2 + \xi(t).$$

Na základe riešenia príkladu 7.3 a 6.9 dostaneme druhú Kolmogorovovu rovnicu v tvare:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(-k q - h \operatorname{sign} q q^2) f}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (A f)}{\partial q^2} = 0.$$

Pre stacionárny prípad analogicky ako v príklade 10.14 je:

$$f = c_2 e^{-\frac{2}{A} \int_0^q (k q + h \operatorname{sign} q q^2) dq} = c_2 e^{-\frac{2}{A} (\frac{1}{2} k q^2 + \frac{1}{3} h \operatorname{sign} q q^3)},$$

$$\text{kde } c_2 = \left(\sqrt{\frac{\pi A}{k}} - \frac{A}{6h} \right)^{-1},$$

$$D_q = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 c_2 e^{-\frac{2}{A} (\frac{1}{2} k q^2 + \frac{1}{3} h \operatorname{sign} q q^3)} dq = \frac{A}{4} \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2k}} - \frac{2}{3h} \sqrt{A}}{\sqrt{\frac{\pi}{2k}} - \frac{1}{6h} \sqrt{A}} \right).$$